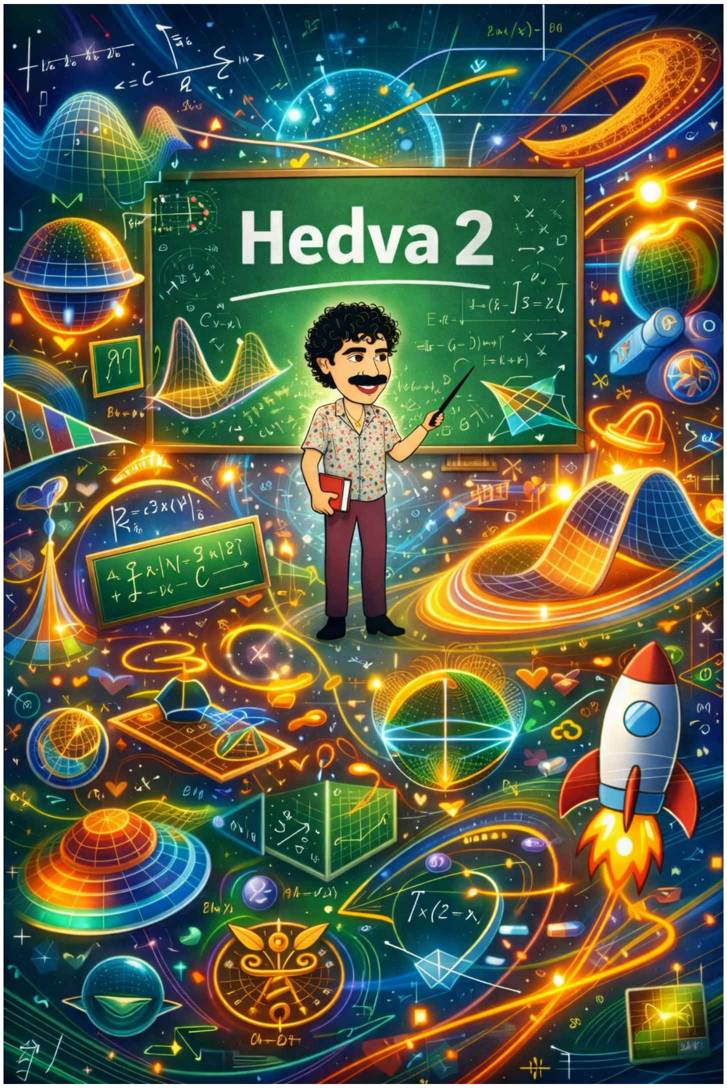
# חדו"א 2 להנדסות

## סיכומים ותרגולים




**נערך ונכתב על ידי חן גדי**

ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המחייב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

עריכה והוראה: חן גדי

# תוכן העניינים

# תרגול 1- התכנסות סדרות פונקציות



## 1.1 מנהלה - קבוצות של חן

### 1.1.1 הנגשת התרגולים

- התרגולים יוקלטו וישודרו בלייב בזום כל הסמסטר.
- ההקלטות יועלו לאתר שיתפרסם במודל. ייתכן שיועלו בדיליי של עד כ5 ימים.
- ייתכנו תקלות טכניות ואנושיות(לא מומלץ להסתמך על זמינות מוחלטת של ההקלטות).
- נדגיש שוב, ייתכנו תקלות טכניות שונות שיימנעו את הנגשת התרגול, סגל הקורס יעשה מאמצים להמנע מהן, אולם האחריות להשלמת החומר במקרה של תקלה טכנית הינה על הסטודנטים.

### 1.1.2 מטלות הבית

- הקורס אורך 11/12 שבועות. בכל שבוע תהיה מטלת בית ול9/10 מהן יהיה מטלה להגשה.
- בכל שבוע שבו יש מטלה להגשה תקבלו תרגיל בית, המורכב משני חלקים - בחלקו הראשון תהיינה 2/3 שאלות הגשה אותן יש לפתור לבד ולהגיש לבדיקה, ובחלקו השני שאלות נוספות לתרגול עצמי שאינן להגשה, להן יפורסמו לחלקן (ולא לכולן) פתרונות חלקיים על מנת שתוכלו לתת לעצמכן משוב על התרגול העצמי.
- הפתרונות יפורסמו יומיים לאחר גמר ההגשה. ביום שלאחר ההגשה אתם עדיין תוכלו להגיש "באיחור" מבלי לבקש את רשות צוות הקורס.
- מטלות הבית יתבססו על החומר מההרצאות ו/או מהתרגולים.

- הרכב הציון הסופי כתוב בסילבוס.הוראות לגבי מטלות הבית כתובות בלשונית.
  כל שאלה על ציונים ומבחן יש להפנות למרצה הקורס.
- **שימו לב:** ההגשה ננעלת אוטומטית בגמש ההגשה אנא תוודאו שאתם מגישים **רק** את השאלות להגשה , של הקורס הנוכחי ובזמן.
- ההגשות אינן חובה אך מומלצות.

### 1.1.3 שעות הקבלה

- שעות קבלה עם המתרגל נועדה לתת מענה לשאלות שעולות על תוכן התרגול בלבד.
- מועד שעת הקבלה, מיקומה ואופן העברתה ייקבעו ע"י המתרגל. שימו לב, כי שעות הקבלה אינן שעת תרגול נוספת, ואינן מחליפות למידה עצמית.
- שעות הקבלה לא יוקלטו ויתחיל אם יגיעו אנשים עד 5 דק מתחילת שעת הקבלה (אלא אם התריאו מראש במייל).

**ייתכנו שינויים בנהלים, נעדכן במידת הצורך.**

### 1.1.4 כמה המלצות

מתמטיקה זו שפה - ועל מנת ללמוד אותה יש לתרגל אותה. הקורס הינו חלק אינטגרלי (ודיפרנציאלי) בלימודי הבסיס המתמטי שאתם רוכשים המהווה בסיס חיוני להמשך לימודיכם האקדמאי. את פסקה זו אקדיש כדי לתת לכן טיפים ללמידה ולהתמודדות עם הקורס.
**גילוי דעת:** כל האמור בחלק זה מהווה המלצה בלבד ואין לראות בו אחריות כלשהי על הכותב בנוגע להחלטות לימודיות, הבנה או יישום החומר על ידי הקוראים. האחריות ללמידה ולשימוש במידע מוטלת על הקוראים בלבד.

- מומלץ לפתור את כל שאלות ההגשה והשאלות תרגול, הושקעה בהן מחשבה רבה.
- במידה ונוצר לכם פער קטן בחומר, צמצמו אותו בעזרת צפייה בהקלטות ובתרגולים, וודאו שאתם יודעים לפתור שאלות מתרגילי הבית באותו הנושא.
- במידה ונוצר פער גדול, מומלץ לתעדף הבנה של החומר התיאורטי ותרגול עצמי של שאלות בסיסיות מאותו הנושא, ולחזור להיות בקצב הכיתה כמה שיותר מהר.
- מומלץ ליצור סיכום של "3 דפי הקסם" : הגדרות ,טענות ומשפטים ו - טריקים.
- אווירה תחרותית אינה מטיבה לא עם הכלל ולא עם הפרט - עזרו אחד לשני! למידה קבוצתית ומתן סיוע ליתר חברי הקורס תומכים גם בלמידה וגם בחוסן הנפשי.
- אין הסעיף האחרון מתייחס להגשה משותפת של מטלות הבית. מטלות הבית הינן אישיות ומקבלות ציון אישי.יש קורלציה גדולה בין הצלחה במטלות הבית לבין הצלחה במבחן.



### 1.1.5 הבהרות, המלצות אישיות ותיאום ציפיות של המתרגל:

- שאלות במייל:

1. שאלות לוגיסטיות - יש לכלול שם מלא , ת.ז ושם קורס. אחרת לא ייענה ולא יטופל. אם אני לא עונה תוך 3 ימים שטופל - ייתכן ופספסתי ויש לכתוב מייל נוסף או לצטט את המייל הראשוני.
2. שאלות על החומר: בשנים קודמות וסמסטרים קודמים הייתי מאוד מוצף לגבי שאלות בחומר(לפחות 20 מיילים ביום). הסמסטר אני אתן את הרשות לשלוח מייל על החומר עם הנהלים הבאים:
   (א) נעשה מאמץ להבין את השאלה באופן עצמאי - ברשימות/ספרים /אינטרנט וצאט גיפיטי
   (ב) המייל קצר ועינייני עם שם הקורס ושאלה על החומר שאוכל לענות בשורה או 2 - יש לצרף תמונות ככל הניתן במקום להפנות אותי למשפט ספציפי.
   (ג) אין לשאול שאלות כמו "האם הדרך שלי נכונה/ תבדוק את הסעיף הזה" - אני לא עונה על שאלות לגבי מטלות הבית ובדיקת דרך הפתרון שלכם יכולה להתבצע בשעות קבלה או במטלות הבית באמצעות בודק התרגילים.
   (ד) מותר לשאול שאלה לגבי הבהרה על נוסח של מטלת הבית.
   (ה) אני אנסה לענות על הכל תוך כמה ימים בודדים. מיילים ארוכים מדי או כאלו שיקחו לי יותר מכמה דקות ספורות לקרוא ולענות לא ייענו עמכם הסליחה והתודה.

- ייתכן ואני אעלה את עצמי פותר סרטונים ביוטיוב. זה לא חלק מתפקידי וחובתי זה בשבילכם ואין לשלוח לי מיילים בנושא.
- במהלך התרגול אני לא אסכם משפטים ומסקנות שעברתם עליהם בכיתה. אני ממליץ שתעשו זאת בעצמכם. התרגול נועד לתרגל את החומר שנעשה בכיתה ולעשות שאלות קצת מורכבות יותר שמפרות חשיבה ומעודדות למידה עצמאית.
- אני כן אקפיד לעשות גם תרגילים בסיסיים.
- לגבי שאלות בשיעורים אני אתן זמן ספציפי. לא אענה על שאלות חוזרות.
- **החומר המחייב הינו החומר שמועבר בהרצאות.**
  לא יהיה אפשרי לתרגל ולדון על כל הנושאים בתרגולים. בפרט, לא יהיה אפשרי לתרגל את כל מה שאפשר לתרגל בכל נושא שנלמד.
- אני מאוד ממליץ להתעניין בחומר בדרכים העומדות לרשותכם: ספרים, גוגל סיכומי עבר אם ישנן(אגודה), שעות קבלה וכדומה. **כל סטודנט אחראי על אופן למידתו.**
- קצב וסדר בתרגול: אשתדל מאוד להיות בקצב סביר לכתוב מסודר ולשים כותרות ואשמח להכוונה במידת הצורך.
- webwork - אין חובה אך מומלץ. עוד תרגילים עם פידבקים עבורכם. הם לא נכתבו בידי והם נותנים מגן.
- אשתדל לתת דוגמאות הוכחות והפרכות בכל נושא.
- אני אעשה סקר הוראה אנונימי באמצע הסמסטר ואני תמיד אקבל כל פידבק בחיוך ובשמחה.
- לא אענה על שאלות באמצע תרגיל.

- אשתדל להעלות דפי תרגול לפני התרגולים אך ייתכנו בהם טעויות ואי דקויות.
**החומר המחייב הינו החומר שמועבר בהרצאות בכתב ובעל פה**.
- אני מאוד ממליץ להגיע מוכן לתרגול ולעבור על ההגדרות והחומר הנלמד בהרצאות לפני התרגולים.
- ייתכן ויהיו תרגילים בשיעור התרגיל שלא כתובים בדף התרגול.

## 1.2 התכנסות נקודתית

**תזכורת (מההרצאה)**

נניח כי $\mathbb{R} \subseteq I$ הוא קטע, ובפרט ייתכן גם $I = \mathbb{R}$. תהיינה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f_n : I \to \mathbb{R}$, ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה נוספת. נאמר כי <u>הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית אל $f$</u> אם לכל $x_0 \in I$ סדרת המספרים, כלומר סדרת התמונות $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$, מתכנסת אל $f(x_0)$ במובן הרגיל של חדו"א 1, כלומר,

$$\forall x_0 \in I, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

באופן שקול, ניתן לנסח זאת כך:

$$\forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{\varepsilon,x_0} \in \mathbb{N} \text{ כך שלכל } n > N_{\varepsilon,x_0} \text{ מתקיים } |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

במצב זה נקרא ל-$f$ <u>פונקציית הגבול</u> של הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, ונסמן

$$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f.$$

**הערה פורמלית**

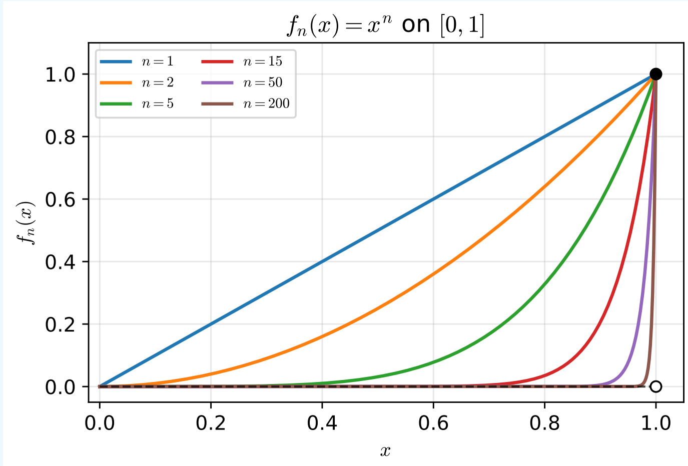
בהגדרת ההתכנסות הנקודתית ה-$N$ מותר לו להיות תלוי *גם* ב-$\varepsilon$ *וגם* ב-$x$. פירוש הדבר: לנקודות שונות בתחום מותר קצב התכנסות שונה לחלוטין. חולשה זו פותחת פתח לתופעות שבהן תכונות אנליטיות-רציפות, אינטגרביליות, גזירות-אינן נשמרות במעבר לגבול.

**דוגמה 1.2.1.**

**הגבול הנקודתי כפונקציה לא-רציפה.** נתבונן ב-$f_n(x) = x^n$ על $[0,1]$. עבור $x \in [0,1)$ מתקיים $x^n \to 0$, ועבור $x = 1$ מתקיים $1^n = 1$. לכן הגבול הנקודתי הוא

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

כל ה-$f_n$ רציפות (אף פולינומים) אך $f$ אינה רציפה ב-$x = 1$; ההתכנסות הנקודתית אינה משמרת רציפות.




**עיקרון מנחה**

**אלגוריתם למציאת הגבול הנקודתי:**

1. קבעו $x \in D$ כקבוע; פרשו את $f_n(x)$ כסדרה מספרית ב-$n$ בלבד.
2. חשבו $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$; השתמשו בכלי הסדרות: $a^n \to 0$ כש-$|a| < 1$; $n^a e^{-n} \to 0$; ועוד.
3. בחנו בנפרד נקודות קצה ונקודות שבהן "המשטר/האפיון" האנליטי משתנה: $x = 0$, $x = 1$, $|x| = 1$, וכדומה.
4. הגדירו $f$ באופן מפוצל בהתאם.

## 1.3 התכנסות במידה שווה ומבחן הסופרימום

**תזכורת (מההרצאה)**

יהא $I \subset \mathbb{R}$ קטע (או $\mathbb{R}$ כולו, כלומר $I = \mathbb{R}$), ותהא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $n$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, ופונקציה נוספת $f : I \to \mathbb{R}$, נאמר כי סדרת הפונקציות $f_n$ מתכנסת <u>במידה שווה (במ"ש)</u> לפונקציה $f$ אם מתקיים:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall x \in I, \forall n > N_\epsilon, \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

ונסמן $f_n \twoheadrightarrow f$ (או לפעמים גם $f_n \xrightarrow[\text{Uniform}]{n\to\infty} f$). חשוב לציין כי התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית, כלומר אם סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש, אז היא בהכרח מתכנסת נקודתית.
תנאי שקול וחשוב הוא ש $f_n \twoheadrightarrow f$ אמ"מ:

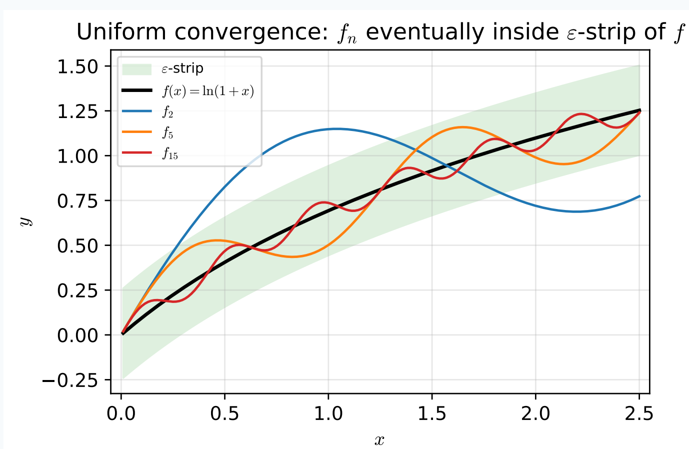
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

כלומר סדרת המספרים $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ מתכנסת לאפס, תנאי זה נקרא לפעמים <u>קריטריון הסופרמום</u>.
שימו לב: $N$ **אינו תלוי ב**-$x$; אותו $N$ תקף לכל הנקודות בתחום בו-זמנית.

**הערה פורמלית**

**פרשנות גיאומטרית.** ההתכנסות במידה שווה פירושה שהחל ממקום מסוים כל הגרפים של $f_n$ שוכנים ברצועה ברוחב $2\varepsilon$ סביב הגרף של $f$:

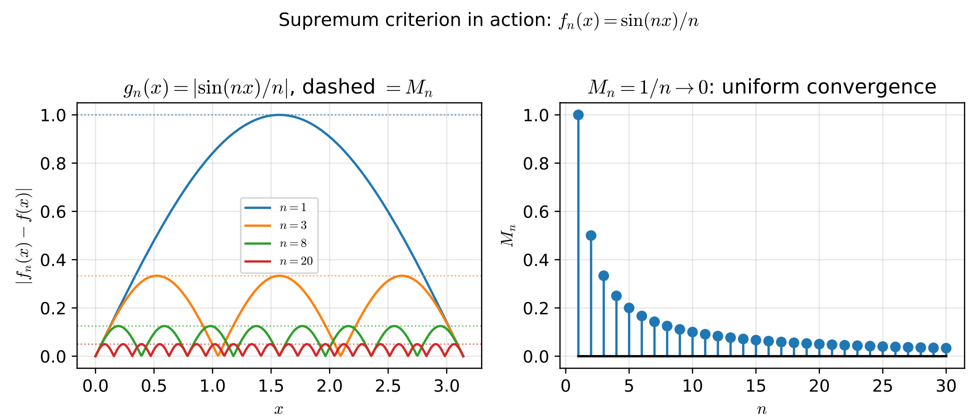
$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \qquad \forall\, x \in D.$$



**טענה 1.3.1.**

**מבחן הסופרימום.** $f_n \rightrightarrows f$ על $D$ אם ורק אם

$$M_n := \sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$




**בחלק מההרצאות טרם ראיתם את התזכורות הבאות:**

**תזכורת (מההרצאה)**

**כלים לשלילה ולאישור של התכנסות במידה שווה:**

- **קריטריון הרציפות:** אם כל $f_n$ רציפה ו-$f$ אינה רציפה, ההתכנסות *אינה* במידה שווה-שכן התכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות רציפות משמרת רציפות (משפט מההרצאה).
- **שיטת סדרת הנקודות:** אם קיימת $\{x_n\} \subset D$ כך ש-$|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0$, אז $M_n \not\to 0$ ואין התכנסות במידה שווה.
- **תלות בתחום:** התכנסות במידה שווה רגישה לתחום. סדרה יכולה להתכנס במידה שווה על תת-תחום סגור ולא להתכנס במידה שווה על התחום כולו.

**עיקרון מנחה**

**אלגוריתם לבדיקת התכנסות במידה שווה:**

1. מצאו את הגבול הנקודתי $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
2. הגדירו $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$.
3. מצאו $M_n = \sup_{x\in D} g_n(x)$; לרוב על-ידי גזירת $g_n$ ומציאת נקודת המקסימום.
4. בדקו: $M_n \to 0$? אם כן-התכנסות במידה שווה; אם לא-אין.

## 1.4 דוגמאות מנחות

**דוגמה 1.4.1.**

$f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ **על** $\mathbb{R}$**.** לכל $x \in \mathbb{R}$: $|f_n(x)| \le 1/n \to 0$, ולכן $f \equiv 0$. החסם $1/n$ אינו תלוי ב-$x$, ולכן

$$M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\sin(nx)|}{n} = \frac{1}{n} \to 0,$$

וההתכנסות **במידה שווה** על כל $\mathbb{R}$.

**הערה עדינה:** הנגזרות $f_n'(x) = \cos(nx)$ אינן מתכנסות נקודתית עבור רוב ה-$x$-ים. התכנסות במידה שווה של סדרה אינה גוררת התכנסות של סדרת הנגזרות.

**דוגמה 1.4.2.**

$f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ **על** $\mathbb{R}$**.** לכל $x \neq 0$: $f_n(x) = \frac{1/n}{1/(nx)+x} \to 0$; ועבור $x = 0$: $f_n(0) = 0$. לכן $f \equiv 0$.

נגזור:

$$f_n'(x) = \frac{1 - nx^2}{(1+nx^2)^2},$$

המתאפס ב-$x = \pm 1/\sqrt{n}$. נציב את נקודת המקסימום:

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1/\sqrt{n}}{1+1} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

לכן $M_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$, וההתכנסות **במידה שווה** על כל $\mathbb{R}$.

**דוגמה 1.4.3.**

$f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ **על** $[0,\infty)$**.** ניתוח לפי משטרים:

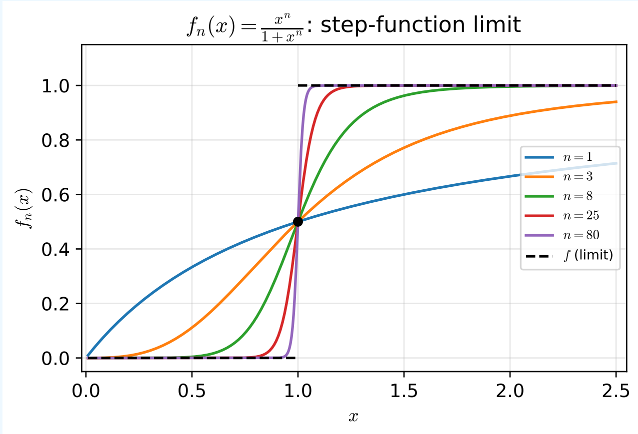
- $0 \le x < 1$: $x^n \to 0$, לכן $f_n(x) \to 0$.
- $x = 1$: $f_n(1) = 1/2$.
- $x > 1$: $x^n \to \infty$, לכן $f_n(x) = (1 + x^{-n})^{-1} \to 1$.

הגבול הנקודתי הוא פונקציית מדרגה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1, \\ 1/2 & x = 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

$f$ אינה רציפה ב-$x = 1$, ולכן ההתכנסות אינה במידה שווה על כל תחום הכולל סביבה של 1.


$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$: step-function limit
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
$x$
$f_n(x)$
$n=1$
$n=3$
$n=8$
$n=25$
$n=80$
$f$ (limit)

## 1.5 תרגילים

**תרגיל 1.5.1.**

תהי $f_n(x) = nx(1-x)^n$ על $[0,1]$.

(א) מצאו את הגבול הנקודתי $f$.

(ב) הוכיחו שההתכנסות אינה במידה שווה על $[0,1]$.

(ג) הוכיחו שההתכנסות במידה שווה על $[\frac{1}{2}, 1]$.

**פתרון.**

**עיקרון מנחה**

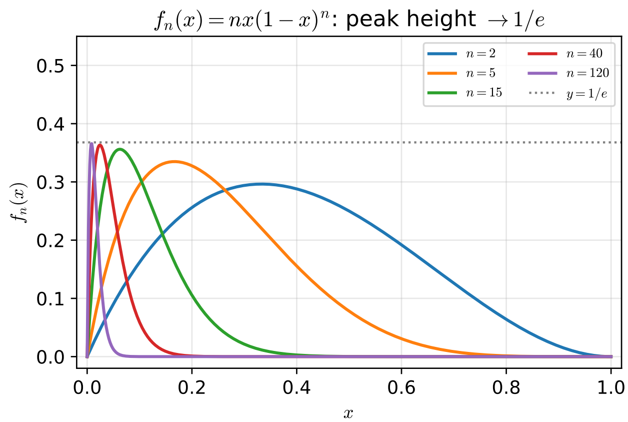
הגבול הנקודתי הוא $f \equiv 0$ בזכות הדעיכה המעריכית $(1-x)^n$. כדי לשלול התכנסות במידה שווה, נמצא את נקודת המקסימום של $f_n$ על-ידי גזירה ונראה שגובה הפיק שואף ל-$1/e \neq 0$. על $[1/2, 1]$ נקודת המקסימום כבר מחוץ לתחום, ונקודת הקצה $x = 1/2$ נותנת דעיכה מעריכית.

**(א)** עבור $x = 0$ או $x = 1$ מתקיים $f_n(x) = 0$. עבור $x \in (0,1)$: הגורם $(1-x)^n$ דועך בקצב מעריכי ומכריע את הגידול הלינארי $nx$, ולכן $f_n(x) \to 0$. נקבל $f \equiv 0$ על $[0,1]$.

**(ב)** נגזור: $f_n'(x) = n(1-x)^{n-1}[(1-x) - nx]$, ולכן $f_n' = 0$ ב-$x_n^* = \dfrac{1}{n+1}$ (נקודת מקסימום). נציב:

$$f_n(x_n^*) = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}.$$

אם כן $M_n \geq f_n(x_n^*) \to 1/e \neq 0$, וההתכנסות **אינה במידה שווה** על $[0,1]$.




**(ג)** עבור $n \geq 2$: $x_n^* = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}$, ו-$f_n$ יורדת על $[x_n^*, 1]$, ולכן המקסימום על $[1/2, 1]$ מתקבל בקצה

:$x = 1/2$

$$M_n = f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

שכן הדעיכה $2^{-n}$ מכריעה את $n$. ההתכנסות **במידה שווה** על $[1/2, 1]$.

$\square$

**ניצחון**

## תרגיל 1.5.2.

תהי $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ על $\mathbb{R}$.

(א) מצאו את הגבול הנקודתי.

(ב) הפריכו התכנסות במידה שווה על $\mathbb{R}$ באמצעות סדרת נקודות.

(ג) הוכיחו התכנסות במידה שווה על $[1,\infty)$.

**פתרון.**

**עיקרון מנחה**

הגבול הנקודתי הוא $f \equiv 0$. עבור הפרכה, הבחירה $x_n = 1/n$ מאפסת את המכנה עד כדי קבוע קטן, ונותנת $f_n(x_n) = 1/2$. עבור התכנסות על $[1,\infty)$ נחסום מלמעלה באמצעות הזנחת ה-1 במכנה.

**(א)** $f_n(0) = 0$. עבור $x \neq 0$: $f_n(x) = \frac{x/n}{x^2+1/n^2} \to 0$, ולכן $f \equiv 0$.

**(ב)** נבחר $x_n = 1/n$: $f_n(x_n) = \frac{n\cdot 1/n}{1+n^2/n^2} = \frac{1}{2}$. מכאן $|f_n(x_n) - 0| = 1/2 \not\to 0$, ובפרט $M_n \geq 1/2$ לכל $n$, כך שההתכנסות **אינה במידה שווה** על $\mathbb{R}$.

**(ג)** לכל $x \geq 1$: $1 + n^2x^2 \geq n^2x^2$, ולכן

$$|f_n(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n}.$$

מכאן $M_n \leq 1/n \to 0$, וההתכנסות **במידה שווה** על $[1,\infty)$.

$\square$

**ניצחון**

### תרגיל 1.5.3.

תהי $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ על $\mathbb{R}$.

(א) הוכיחו שהגבול הנקודתי הוא $f(x) = |x|$.

(ב) הוכיחו שההתכנסות במידה שווה על כל $\mathbb{R}$.

(ג) מדוע אין סתירה עם העובדה שכל $f_n$ גזירה ואילו $f$ אינה גזירה ב-$0$?

**פתרון.**

**עיקרון מנחה**

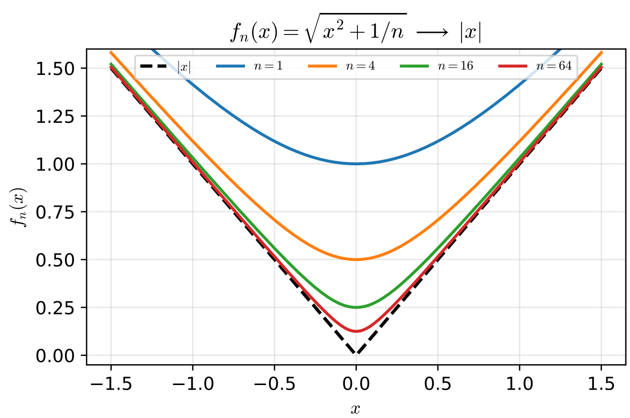
שימוש בטכניקת הכפלה בצמוד: $\frac{1/n}{\sqrt{x^2+1/n}+|x|} = \sqrt{x^2 + 1/n} - |x|$. המכנה חסום מלמטה על-ידי $\sqrt{1/n}$, ונקבל חסם $1/\sqrt{n}$ שאינו תלוי ב-$x$.

**(א)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + 1/n} = \sqrt{x^2} = |x|$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

**(ב)** כפלה בצמוד:

$$0 \le \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|} \le \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

החסם $1/\sqrt{n}$ אינו תלוי ב-$x$, ולכן $M_n \le 1/\sqrt{n} \to 0$. ההתכנסות **במידה שווה**.




**(ג)** כל $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ אך הגבול $|x|$ אינו גזיר ב-$0$. אין סתירה: התכנסות במידה שווה משמרת *רציפות* אך *אינה משמרת גזירות* בהכרח. שימור גזירות דורש תנאים נוספים (למשל, התכנסות במידה שווה של סדרת הנגזרות עצמן).

□

**ניצחון**

**תרגיל 1.5.4.**

תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות חסומות על $D$ (כלומר לכל $n$ קיים $C_n > 0$ כך ש-$|f_n(x)| \le C_n$ לכל $x \in D$), ונניח $f_n \rightrightarrows f$ על $D$.

(א) הוכיחו שהפונקציה הגבולית $f$ חסומה על $D$.

(ב) הוכיחו שהסדרה $\{C_n^*\}$ כאשר $C_n^* := \sup_{x\in D}|f_n(x)|$ חסומה.

**פתרון.**

**עיקרון מנחה**

שני הסעיפים מבוססים על הצבת $\varepsilon = 1$ בהגדרת ההתכנסות במידה שווה, ואז שימוש באי-שוויון המשולש כדי להעביר חסימות מ-$f_N$ ל-$f$ ובחזרה.

**(א)** מ-$f_n \rightrightarrows f$ עם $\varepsilon = 1$ קיים $N$ כך שלכל $n \ge N$ ולכל $x \in D$: $|f_n(x) - f(x)| < 1$. בפרט עבור $n = N$: $|f(x)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| < 1 + C_N$ לכל $x \in D$, ולכן $f$ חסומה על-ידי $1 + C_N$.
**(ב)** לכל $n \ge N$: $C_n^* = \sup_{x\in D}|f_n(x)| \le \sup_{x\in D}(|f(x)| + |f_n(x) - f(x)|) \le (1 + C_N) + 1 = 2 + C_N$. עבור $n < N$ ישנם סופית $C_n^*$-ים, ולכן הסדרה כולה חסומה.

$\square$



**תרגיל 1.5.5.**

תהי $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$ על $[0, \infty)$.

(א) מצאו את הגבול הנקודתי.

(ב) קבעו את התחום המקסימלי $D \subseteq [0, \infty)$ עליו ההתכנסות במידה שווה, ונמקו.

**פתרון.**

**עיקרון מנחה**

הגבול הנקודתי הוא פונקציית מדרגה עם קפיצות ב-$x = 1$. התכנסות במידה שווה אפשרית רק על תחומים המתרחקים מ-1 במרחק חיובי קבוע, ולשם כך נחסום את $f_n - f$ באמצעות חזקות גיאומטריות בכל צד.

**(א)** כמו בדוגמה שלמעלה: $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1,\\ 1/2 & x=1,\\ 1 & x>1.\end{cases}$

**(ב)** על $[0,1-\delta]$ (לכל $\delta>0$ קבוע): $\sup_{x\in[0,1-\delta]}\frac{x^n}{1+x^n}\le(1-\delta)^n\to0$.
על $[1+\delta,\infty)$: $|f_n(x)-1|=\frac{1}{1+x^n}\le\frac{1}{(1+\delta)^n}\to0$, חסם שאינו תלוי ב-$x$.
ולכן על כל תחום $D$ המקיים $D\cap(1-\delta,1+\delta)=\emptyset$ עבור $\delta>0$ כלשהו, ההתכנסות במידה שווה.
*הפרכה* על $[0,1)$: הסדרה $x_n=1-1/n$ מקיימת

$$f_n(x_n)=\frac{(1-1/n)^n}{1+(1-1/n)^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{e^{-1}}{1+e^{-1}}\ne0=f(x_n),$$

ולכן $M_n\not\to0$ על $[0,1)$.
**תשובה:** התחום המקסימלי הוא כל $D\subseteq[0,\infty)$ שמתרחק מ-1 במרחק חיובי: $\inf_{x\in D}|x-1|>0$.

□

# ניצחון

## תרגיל 1.5.6.

תהי $f_n(x)=\frac{n^2x}{1+n^px^2}$ על $[0,\infty)$, כאשר $p>2$ פרמטר.

(א) הוכיחו שלכל $p>2$ הגבול הנקודתי הוא $f\equiv0$.

(ב) חשבו $M_n=\sup_{x\ge0}f_n(x)$ כפונקציה של $n$ ו-$p$.

(ג) קבעו עבור אילו $p>2$ ההתכנסות במידה שווה.

**פתרון.**

**עיקרון מנחה**

זהו תרגיל פרמטרי מסוג "מצאו סף". נגזור כדי למצוא את נקודת המקסימום, נציב, ונקבל $M_n\sim n^{2-p/2}$. ההתכנסות במידה שווה שקולה ל-$2-p/2<0$, כלומר $p>4$.

**(א)** $f_n(0)=0$. עבור $x>0$: $f_n(x)=\frac{x}{n^{-2}+n^{p-2}x^2}\to0$ שכן $n^{p-2}\to\infty$ (כיוון ש-$p>2$).
**(ב)** גזירה: $f_n'(x)=\frac{n^2(1-n^px^2)}{(1+n^px^2)^2}$, המתאפס ב-$x^*=n^{-p/2}$. נציב:

$$M_n=f_n(x^*)=\frac{n^2\cdot n^{-p/2}}{1+1}=\frac{n^{2-p/2}}{2}.$$

**(ג)** $p>4\iff2-p/2<0\iff M_n\to0$.

- $p>4$: התכנסות במידה שווה.

- $p=4$: $M_n=1/2$ קבוע - אין התכנסות במידה שווה.
- $2<p<4$: $M_n\to\infty$ - אין התכנסות במידה שווה.

□

# ניצחון

**רק אחרי הרצאות 2 ניתן לפתור תרגיל זה**

**תרגיל 1.5.7.**

הוכיחו שקיימת סדרת פונקציות רציפות $\{f_n\}$ על $[0,1]$ המקיימת בו-זמנית:

(א) $f_n\to 0$ נקודתית על $[0,1]$.

(ב) $\int_0^1 f_n(x)\,dx=1$ לכל $n$.

הסיקו שהתכנסות נקודתית אינה מאפשרת להחליף סדר גבול ואינטגרל.

**פתרון.**

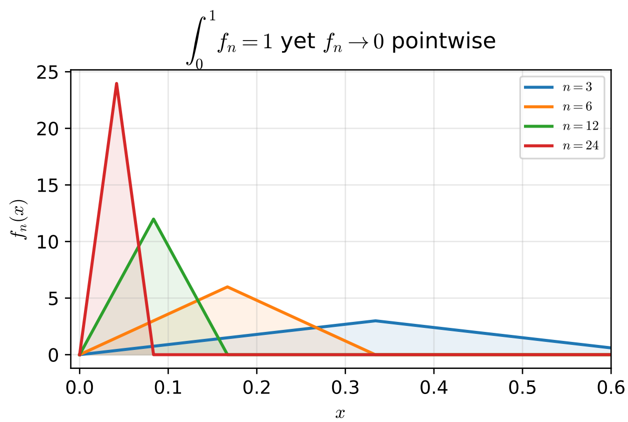
**עיקרון מנחה**

נבנה סדרת "משולשים מתכווצים" שבסיסם הולך ומתקצר ב-$2/n$ וגובהם $n$, כך ששטח המשולש שמור ב-$1$ אך הפונקציות שואפות נקודתית לאפס.

נגדיר

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2x & 0\le x\le 1/n,\\ n-n^2(x-1/n) & 1/n\le x\le 2/n,\\ 0 & 2/n\le x\le 1.\end{cases}$$

זהו משולש שווה-שוקיים על $[0,2/n]$ בגובה $n$.




**רציפות:** בכל קטע $f_n$ לינארית, ובנקודות החיבור $x = 1/n$ ו-$x = 2/n$ שני הביטויים מתאימים ($f_n(1/n) = n$, $f_n(2/n) = 0$).
**התכנסות נקודתית:** $f_n(0) = 0$. עבור $x > 0$ קבוע: לכל $n > 2/x$ מתקיים $f_n(x) = 0$, ולכן $f_n(x) \to 0$.
**האינטגרל:** $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1$.
**מסקנה:**

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

התכנסות נקודתית *אינה* מתירה החלפת סדר הגבול והאינטגרל. (כידוע מההרצאה, התכנסות *במידה שווה* כן מתירה את ההחלפה.)

□

# ניצחון

## תרגיל 1.5.8.

תהי $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ על $[0, M]$, כאשר $M > 0$ קבוע.

(א) הוכיחו שהגבול הנקודתי הוא $f(x) = e^x$.

(ב) חשבו $M_n = \sup_{x\in[0,M]} |f_n(x) - e^x|$ והוכיחו ש-$M_n \to 0$.

**רמז לסעיף (ב):** נסחו חסם עליון ב-$f_n(M)$ והשתמשו בקמירות.

**פתרון.**

### עיקרון מנחה

הגבול הנקודתי ידוע: $(1+x/n)^n \nearrow e^x$ מונוטונית. מהמונוטוניות, הסופרימום של ההפרש מתקבל בנקודת הקצה $x=M$, ושם ההתכנסות המספרית $(1+M/n)^n \to e^M$ מספיקה.

**(א)** לכל $x \geq 0$ קבוע, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \nearrow e^x$. זה תוצאה ידועה מחדוו"א 1 (או ישירות מהגדרת $e^x$ כגבול).
**(ב)** מהמונוטוניות $f_n(x) \leq e^x$ לכל $x \geq 0$ ולכל $n$, ולכן

$$0 \leq e^x - f_n(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n .$$

הפונקציה $g_n(x) = e^x - f_n(x)$ אי-שלילית. נטען ש-$g_n$ עולה על $[0,M]$. אכן, $g_n'(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0$ כיוון ש-$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq e^x$ עבור $x \geq 0$. לכן

$$M_n = g_n(M) = e^M - \left(1+\frac{M}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^M - e^M = 0.$$

ההתכנסות **במידה שווה** על $[0,M]$.

$\square$



### תרגיל 1.5.9.

תהי $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$ על $\mathbb{R}$.

(א) מצאו את הגבול הנקודתי.

(ב) חשבו $M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ במפורש.

(ג) הסיקו האם ההתכנסות במידה שווה.

(ד) מה קורה כשמצמצמים לתחום $[0,A]$ עבור $A > 0$ קבוע?

**פתרון.**

### עיקרון מנחה

זוהי סדרת "בליטות נודדות": כל $f_n$ היא לורנציאנית ממורכזת ב-$x=n$, ולכן הגבול הנקודתי הוא $0$ (הבליטה בורחת לאינסוף), אך $M_n = f_n(n) = 1$ תמיד. על תחום חסום הבליטה יוצאת החוצה ממקום מסוים.

**(א)** לכל $x$ קבוע: $(x-n)^2 \to \infty$, ולכן $f_n(x) \to 0$. אם כן $f \equiv 0$.

**(ב)** $|f_n(x)| = \frac{1}{1+(x-n)^2}$ מקבל מקסימום ב-$x = n$, ושם $f_n(n) = 1$. לכן $M_n = 1$ לכל $n$.
**(ג)** $M_n = 1 \not\to 0$, ההתכנסות **אינה במידה שווה** על $\mathbb{R}$.
**(ד)** עבור $n > A$: המקסימום על $[0, A]$ מתקבל ב-$x = A$ (הנקודה הקרובה ביותר ל-$n$ בתחום), ולכן

$$M_n^{[0,A]} = \frac{1}{1+(A-n)^2} \to 0.$$

ההתכנסות במידה שווה על $[0, A]$.

□

# ניצחון

## תרגיל 1.5.10.

עבור סדרת הפונקציות הבאה מצאו את הפונקציה הגבולית וקבעו האם ההתכנסות היא במידה שווה.
הפונקציה $f_n(x)$ מוגדרת כך:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$$

בתחום:

$$f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

**פתרון.**
נפריד את התחום לשני קטעים: $[0, 1]$ ו- $[1, \infty)$. נבדוק התכנסות נקודתית:

- יהי $x_0 \in [0, 1]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x_0^n} = 1$$

- יהי $x_0 \in [1, \infty)$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x_0^n} = x_0$$

לכן הפונקציה הגבולית היא:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ x, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

נבדוק התכנסות במ"ש: **נבחין שהפונקציה הגבולית רציפה ולכן:**
הפונקציה $f_n(x) - f(x)$ היא פונקציה רציפה כחיסור של פונקציות רציפת בתחום הנתון.
מכאן כמובן שגם פונקציית הערך המוחלט של הנ"ל גם רציפה. כעת נתבונן במבחן הסופרימום:

$$M_n = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} \left| \sqrt[n]{1+x^n} - \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ x, & x \in [1, \infty) \end{cases} \right|$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \left| \begin{cases} \sqrt[n]{1+x^n}-1, & x\in[0,1] \\ \sqrt[n]{1+x^n}-x, & x\in[1,\infty) \end{cases} \right|$$

$$= \sup\left[ \sup_{x\in[0,1]} \left|\sqrt[n]{1+x^n}-1\right|, \sup_{x\in[1,\infty)} \left|\sqrt[n]{1+x^n}-x\right| \right]$$

כעת נבדוק את שני האפשרויות :

1. $\sup_{x\in[0,1]} \left|\sqrt[n]{1+x^n}-1\right|$ :
לכל $n$ מתקיים כי הפונקציה $\sqrt[n]{1+x^n}-1$ מונו' עולה ב $[0,1]$ ולכן הסופרימום מתקבל ב $x=1$
כלומר :
$\sup_{x\in[0,1]} \left|\sqrt[n]{1+x^n}-1\right| = |\sqrt[n]{2}-1| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

2. $\sup_{x\in[1,\infty)} \left|\sqrt[n]{1+x^n}-x\right|$ :
הקטע אינו סגור, ולכן לא ניתן לגזור ולמצוא מקסימום סתם כך. לא ניתן לבדוק את הקצה $x=\infty$, אך ניתן לבדוק את ההתנהגות של הפונקציה. מאחר שהפונקציה מונוטונית יורדת, הסופרמום יתקבל ב- $x=1$. **נוכיח שהיא מונו' יורדת** - לשם כך נגזור ונראה שהנגזרת קטנה מאפס בתחום הנתון.
נגזור את הביטוי:
$$\left(\sqrt[n]{1+x^n}-x\right)' = \frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{1-n}{n}} \cdot nx^{n-1}-1$$
$$= \left(\frac{x}{(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}\right)^{n-1} - 1 < 1^{n-1}-1 = 0$$
ולכן, הסופרמום מתקבל ב- $x=1$.
ולכן שוב: $\sup_{x\in[1,\infty)} \left|\sqrt[n]{1+x^n}-x\right| = |\sqrt[n]{2}-1| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ובסה"כ $M_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$
ולכן במ"ש.

$\square$

**ניצחון**