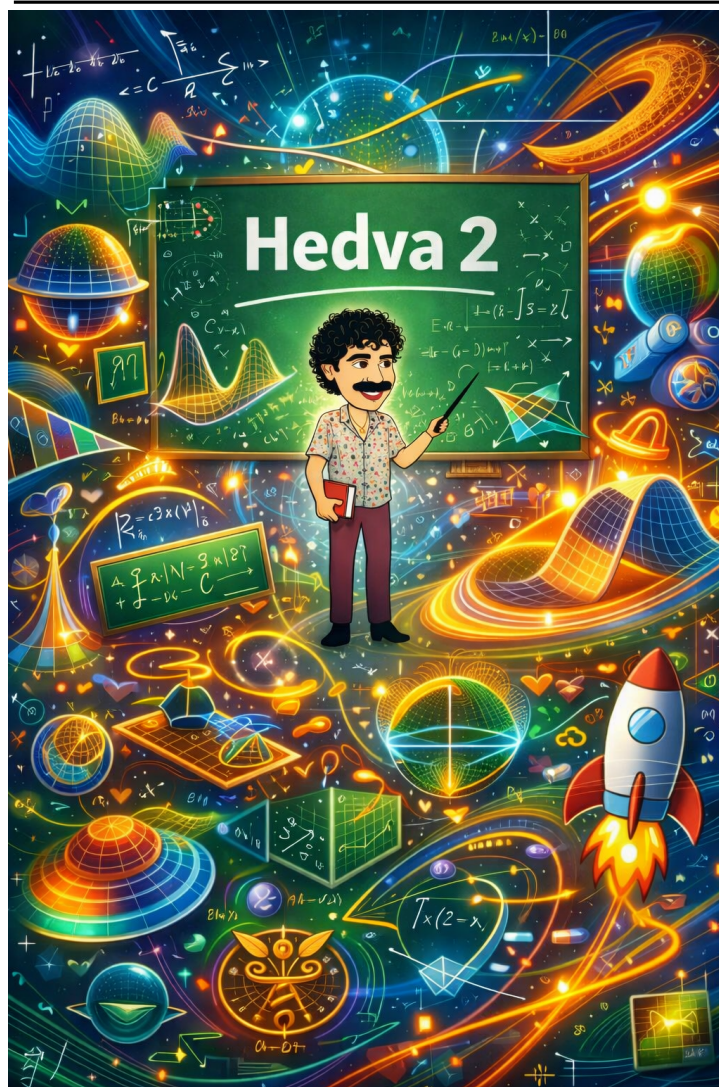


חדו"א 2 להנדסות

סיכומים ותרגולים



נערך ונכתב על ידי חן גדי ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המצויב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

נוצר על ידי חוג גדי

תוכן העניינים

2	1 תרגול 10: אינטגרלים משולשים וקואורדינטות במרחב
2	1.1 שאלת פתיחה מסכמת: אינטגרל כפול, החלפת משתנים וחשמל
8	1.2 הגדרות ופוביני במרחב
9	1.3 החלפת משתנים בשלושה משתנים
12	1.4 תרגילים

תרגול 10: אינטגרלים משולשים וקואורדינטות במרחב

עיקרון מנחה

אינטגרל משולש הוא סכימה רציפה על פני נפח. הבחירה החשובה היא מערכת הקואורדינטות: קרטזית לתיבות ולתחומים בין משטחים פשוטים, גלילית לסימטריה סביב ציר, וכדורית לסימטריה סביב נקודה. בכל מעבר משתנים חייבים לחשב את היעקוביאן ולכתוב את גבולות התחום מחדש.

1.1 שאלת פתיחה מסכמת: אינטגרל כפול, החלפת משתנים וחשמל

תרגיל 1.1.1

לוח טעון דק נמצא במישור $z = 0$. תחום הלוח הוא

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}.$$

נתונה נקודת המדידה

$$P = (0, 0, a), \quad a > 0,$$

וצפיפות המטען המשטחית היא

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} g\left(\frac{y}{x}\right),$$

כאשר $\sigma_0 > 0$, הפונקציה $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, ומתקיים

$$\int_0^1 g(t) dt = 2.$$

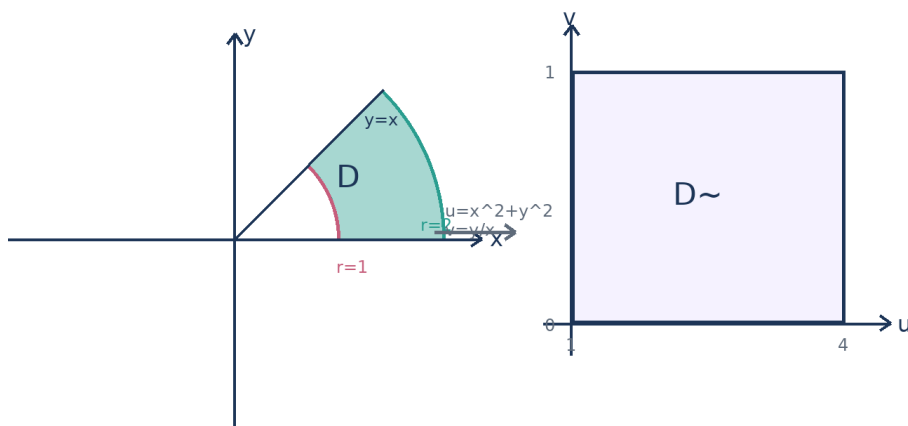
כתבו את התחום בשני סדרי אינטגרציה, חשבו את שטחו, חשבו את הפוטנציאל החשמלי $V(P)$, וחשבו את רכיב השדה החשמלי $E_z(P)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

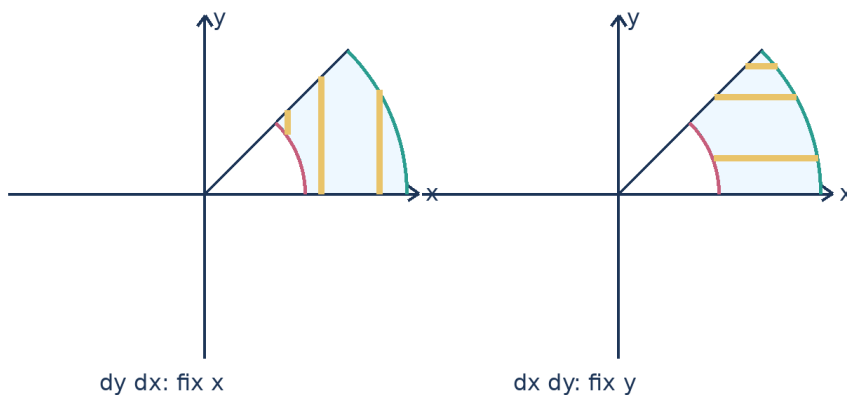
התחום הוא חתיכה של טבעת: בין מעגל פנימי ברדיוס 1 למעגל חיצוני ברדיוס 2, ומעל ציר x עד הישר $y = x$. לכן לפני כל חישוב כדאי לצייר אותו ולשאול שאלה פשוטה: אם מקבעים x , מאיפה עד איפה y רץ; ואם מקבעים y , מאיפה עד איפה x רץ.

Annular sector and transformed rectangle



איור: התחום המקורי במישור xy , והתחום המתקבל במשתנים u, v .

Vertical and horizontal slices of D



איור: חתכים אנכיים עבור $dy dx$, וחתכים אופקיים עבור $dx dy$.

הבנה של התחום. האי-שוויון

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

אומר שהנקודות נמצאות מחוץ למעגל $r = 1$ ובתוך המעגל $r = 2$. התנאי

$$0 \leq y \leq x$$

אומר שהנקודות נמצאות בין הישר $y = 0$ לבין הישר $y = x$. לכן זהו סקטור טבעתי ברביע הראשון, מזווית 0 עד זווית $\pi/4$.

סדר $dy dx$: חתכים אנכיים. כאן מקבעים x , ומסתכלים על הקטע האנכי שנמצא בתוך D . כדי לדעת איפה מתחילים ומסיימים, מחפשים את ערכי x שבהם צורת הקטע משתנה. הערך השמאלי ביותר מתקבל בחיתוך המעגל הפנימי עם הישר $y = x$:

$$x^2 + x^2 = 1 \implies 2x^2 = 1 \implies x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

הערך הימני ביותר מתקבל בקצה המעגל החיצוני על ציר x , ולכן $x = 2$. יש עוד שתי נקודות שבהן הגבול משתנה:

$$x = 1$$

כי שם המעגל הפנימי כבר לא מפריע מלמטה, ו-

$$x = \sqrt{2}$$

כי שם הישר $y = x$ פוגש את המעגל החיצוני.

לכן מפרקים את התחום לשלוש קבוצות:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$

כאשר

$$D_1 = \left\{ (x, y) : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq x \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) : 1 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq x \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) : \sqrt{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \right\}.$$

מכאן, לכל פונקציה רציפה F ,

$$\begin{aligned} \iint_D F(x, y) dA &= \int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x F(x, y) dy dx \\ &+ \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x F(x, y) dy dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} F(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

סדר $dx dy$: חתכים אופקיים. כאן מקבעים y , ומסתכלים על הקטע האופקי שנמצא בתוך D . הערך הנמוך ביותר הוא $y = 0$. הערך הגבוה ביותר מתקבל בחיתוך הישר $y = x$ עם המעגל החיצוני:

$$y = x, \quad x^2 + y^2 = 4 \implies 2y^2 = 4 \implies y = \sqrt{2}.$$

השינוי קורה כאשר הקטע האופקי עובר את החלק העליון של המעגל הפנימי על הישר $y = x$:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

לכן מפרקים לשתי קבוצות:

$$D = H_1 \cup H_2,$$

כאשר

$$H_1 = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \right\},$$

$$H_2 = \left\{ (x, y) : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq \sqrt{2}, y \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \right\}.$$

ולכן

$$\begin{aligned} \iint_D F(x, y) dA &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} F(x, y) dx dy \\ &+ \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} F(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

שטח התחום. בפולריות התיאור קצר מאוד:

$$D = \left\{ (r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

לכן

$$\text{Area}(D) = \int_0^{\pi/4} \int_1^2 r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4-1}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

כלומר

$$\boxed{\text{Area}(D) = \frac{3\pi}{8}}.$$

הכנה לחישוב הפוטנציאל. בצפיפות מופיעים שני ביטויים חשובים:

$$x^2 + y^2, \quad \frac{y}{x}.$$

לכן נגדיר

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{y}{x}.$$

התחום החדש הוא הקבוצה

$$\tilde{D} = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 1\}.$$

זה קורה כי $x^2 + y^2$ נע בין 1 ל-4, והיחס y/x נע בין 0 ל-1. נחשב את היעקוביאן:

$$u_x = 2x, \quad u_y = 2y, \quad v_x = -\frac{y}{x^2}, \quad v_y = \frac{1}{x}.$$

לכן

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x = (2x) \frac{1}{x} - (2y) \left(-\frac{y}{x^2}\right) = 2 + 2\frac{y^2}{x^2}.$$

כלומר

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 2(1 + v^2), \quad dA = \frac{1}{2(1 + v^2)} du \, dv.$$

חישוב הפוטנציאל. לפי ההגדרה,

$$V(P) = k_e \iint_D \frac{\sigma(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} dA.$$

נחליף את הביטוי שבמונה:

$$\frac{\sigma(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} = \sigma_0 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) g\left(\frac{y}{x}\right) = \sigma_0(1 + v^2)g(v).$$

לכן

$$V(P) = k_e \int_0^1 \int_1^4 \sigma_0(1 + v^2)g(v) \frac{1}{2(1 + v^2)} du \, dv.$$

הגורם $1 + v^2$ מצטמצם:

$$V(P) = \frac{k_e \sigma_0}{2} \int_0^1 \int_1^4 g(v) du dv.$$

כעת

$$\int_1^4 du = 3, \quad \int_0^1 g(v) dv = 2.$$

לכן

$$\boxed{V(P) = 3k_e \sigma_0.}$$

חישוב $E_z(P)$. אלמנט מטען קטן הוא

$$dq = \sigma(x, y) dA.$$

המרחק ממנו אל $P = (0, 0, a)$ הוא

$$\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}.$$

רכיב השדה בכיוון z מקבל עוד גורם a , כי ההפרש בגובה בין הלוח לבין הנקודה הוא a . לכן

$$E_z(P) = k_e \iint_D \frac{a\sigma(x, y)}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} dA.$$

במשתנים u, v , הביטוי הזה נהיה

$$\frac{a\sigma(x, y)}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = a\sigma_0(1 + v^2)g(v) \frac{1}{u + a^2}.$$

לכן

$$E_z(P) = k_e \int_0^1 \int_1^4 a\sigma_0(1 + v^2)g(v) \frac{1}{u + a^2} \frac{1}{2(1 + v^2)} du dv.$$

שוב $1 + v^2$ מצטמצם:

$$E_z(P) = \frac{k_e a \sigma_0}{2} \left(\int_1^4 \frac{du}{u + a^2} \right) \left(\int_0^1 g(v) dv \right).$$

מאחר ש- $\int_0^1 g(v) dv = 2$, נקבל

$$E_z(P) = k_e a \sigma_0 [\ln(u + a^2)]_1^4.$$

ולכן

$$\boxed{E_z(P) = k_e a \sigma_0 \ln \left(\frac{a^2 + 4}{a^2 + 1} \right).}$$

□

ניצחון

1.2 הגדרות ופוביני במרחב

הגדרה פורמלית

אינטגרל משולש. אם $E \subseteq \mathbb{R}^3$ הוא תחום מרחבי ו- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, אז

$$\iiint_E f(x, y, z) dV$$

הוא הסכום הרציף של ערכי f על פני הנפח. כאשר $f = 1$, מתקבל נפח. כאשר $f = \rho$ היא צפיפות מסה, מתקבלת המסה הכוללת.

הערה קטנה ומועילה

אינטגרליות במרחב. על תיבה $B \subseteq \mathbb{R}^3$, פונקציה חסומה היא אינטגרלית רימן אם סכומי רימן שלה מתכנסים לאותו גבול כאשר גודל החלוקה שואף לאפס, בלי תלות בבחירת נקודות הדגימה בתיבות הקטנות. רציפות על תיבה קומפקטית מספיקה. בקורס מקבלים גם פונקציות חסומות שרציפות פרט למספר סופי של משטחים חלקים למקוטעין. כאשר התחום אינו תיבה, מתארים אותו כתחום פשוט או כאיחוד סופי של תחומים פשוטים.

1.2.1 טענה

פוביני על תיבה. אם $B = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ ו- f רציפה על B , אז

$$\iiint_B f dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^h f(x, y, z) dz dy dx,$$

וכן בכל סדר אינטגרציה אחר.

הוכחה.

זהו משפט פוביני במרחב תחת ההנחות הרגילות בקורס. רציפות על תיבה קומפקטית מספיקה, ובניסוחים כלליים יותר מניחים אינטגרליות רימן עם תנאים מתאימים. המשפט מאפשר לחשב אינטגרל משולש באמצעות שלושה אינטגרלים חד-משתניים חוזרים.

הגדרה פורמלית

תחום פשוט ביחס לציר z . תחום E פשוט ביחס לציר z אם

$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}.$$

אז

$$\iiint_E f dV = \iint_D \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dA.$$

באופן דומה מגדירים תחומים פשוטים ביחס לציר x או y .

1.3 החלפת משתנים בשלושה משתנים

טענה 1.3.1

יעקוביאן בשלושה משתנים. תהי

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

נגדיר

$$J_T(u, v, w) = \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}.$$

בהחלפת משתנים מניחים ש- T היא C^1 , חד חד ערכית בתחום המתאים עד בעיות שפה לא מזיקות, ושהיעקוביאן אינו מתאפס פרט אולי לקבוצות שפה או קבוצות נפח אפס שאינן פוגעות בהחלפה. אז

$$dV = |J_T(u, v, w)| du dv dw,$$

כלומר

$$dV = |J_T| du dv dw.$$

הוכחה.

הדטרמיננטה מודדת את גורם שינוי הנפח המקומי. בתלת ממד תא קטן במשתנים החדשים נשלח למקבילון קטן במרחב, ונפחו מוכפל בערך המוחלט של הדטרמיננטה.

הגדרה פורמלית

קואורדינטות גליליות.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

כאן

$$T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

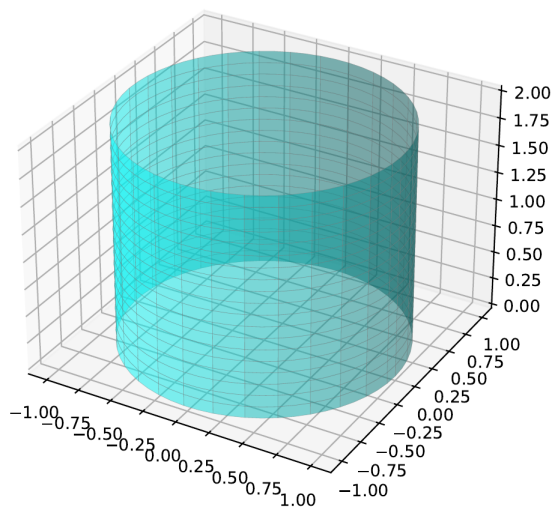
היעקוביאן הישיר הוא

$$J_T(r, \theta, z) = \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

לכן

$$dV = r dr d\theta dz.$$

היעקוביאן מתאפס רק על ציר z , כלומר $r = 0$, קבוצה בעלת נפח אפס. בשימושים הרגילים בגליליות זו חריגה לא מזיקה.

Cylindrical region: $0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 2$ 

קואורדינטות גליליות מוכללות

הערה קטנה ומועילה

קואורדינטות גליליות רגילות מותאמות לסימטריה מעגלית:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

כאשר התחום הוא גליל אליפטי, טבעי להשתמש בסקיילינג שונה בשני הצירים:

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta, \quad z = z,$$

כאשר $a, b > 0$. כלומר

$$T(r, \theta, z) = (ar \cos \theta, br \sin \theta, z).$$

היעקוביאן הישיר הוא

$$J_T(r, \theta, z) = \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \det \begin{pmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta & 0 \\ b \sin \theta & br \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = abr.$$

לכן

$$dV = abr \, dr \, d\theta \, dz.$$

היעקוביאן מתאפס רק על הציר המוכלל $r = 0$, קבוצה בעלת נפח אפס. השיטה מתאימה במיוחד לתחומים מן הצורה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad 0 \leq z \leq h.$$

הגדרה פורמלית

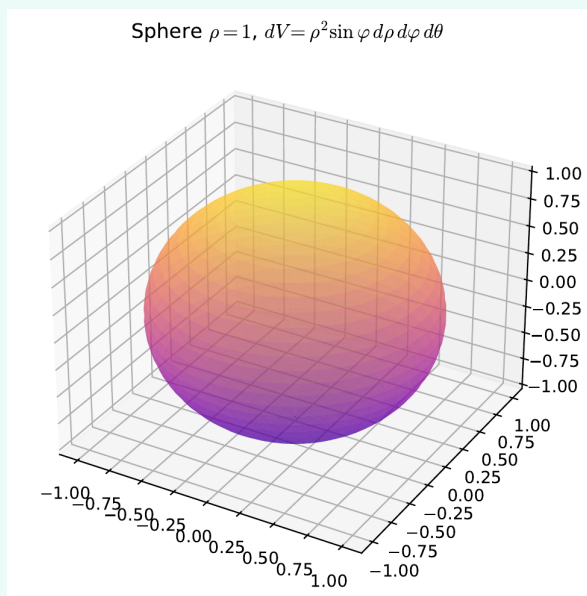
קואורדינטות כדוריות.

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi,$$

כאשר $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\rho \geq 0$. היעקוביאן הוא

$$J_T(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin \varphi, \quad dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

היעקוביאן מתאפס בראשית ובכיווני הציר הפולרי, כלומר כאשר $\rho = 0$ או $\sin \varphi = 0$. אלו קבוצות נפח אפס, ולכן הן אינן פוגעות בחישובי נפח רגילים. כדוריות טבעיות כאשר התחום או האינטגרנד תלויים ב- $x^2 + y^2 + z^2$.



הערה קטנה ומועילה

בחירת מערכת קואורדינטות.

• קרטזית: תיבות, מישורים, גרפים $z = f(x, y)$, תחומים בין משטחים.

- גלילית: גלילים, פרבולואידים סביב ציר z , פונקציות של $x^2 + y^2$.
- כדורית: כדורים, קליפות כדוריות, קונוסים דרך הראשית, פונקציות של המרחק מן הראשית.

הערה קטנה ומועילה

סימטריה לפני חישוב. לפני שמציבים גבולות כדאי לשאול מה הסימטריה של התחום ושל האינטגרנד. אם התחום והצפיפות סימטריים ביחס למישור yz , אז $\bar{x} = 0$. אם הם סימטריים ביחס למישור xz , אז $\bar{y} = 0$. צפיפות רדיאלית בכדור מובילה לקואורדינטות כדוריות, וצפיפות שתלויה רק ב- $x^2 + y^2$ סביב ציר z מובילה לקואורדינטות גליליות. סימטריה אינה קיצור קוסמטי, אלא דרך למנוע אינטגרלים מיותרים.

1.4 תרגילים

1.4.1 תרגיל

חשבו את המסה של גוף התופס את התיבה

$$B = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$$

וצפיפותו

$$\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

התיבה היא התחום הפשוט ביותר. משתמשים בפוביני, והאינטגרל מתפצל לסכום של אינטגרלים בסיסיים.

$$M = \iiint_B (1 + x + y + z) dV = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (1 + x + y + z) dz dy dx.$$

האינטגרל הפנימי:

$$\int_0^3 (1 + x + y + z) dz = 3(1 + x + y) + \frac{9}{2}.$$

לכן

$$M = \int_0^1 \int_0^2 \left(3 + 3x + 3y + \frac{9}{2} \right) dy dx = \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{15}{2} + 3x + 3y \right) dy dx.$$

$$\int_0^2 \left(\frac{15}{2} + 3x + 3y \right) dy = 15 + 6x + 6 = 21 + 6x.$$

$$M = \int_0^1 (21 + 6x) dx = 21 + 3 = 24.$$

$$M = 24.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.2.

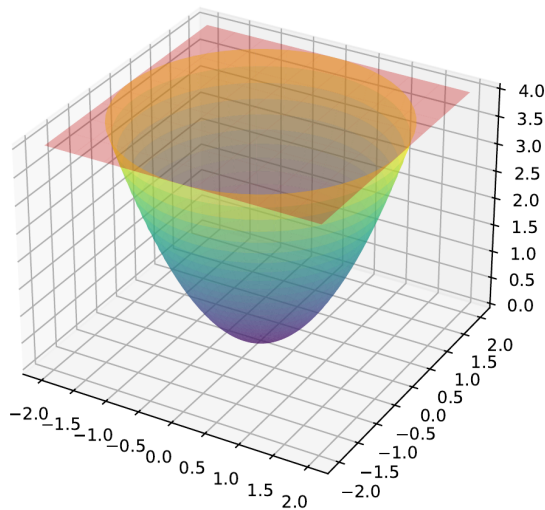
חשבו את נפח הגוף הכלוא בין הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ לבין המישור $z = 4$.

פתרון.

עיקרון מנחה

התחום סימטרי סביב ציר z , ולכן גליליות טבעיות. ההיטל למישור xy הוא דיסק $0 \leq r \leq 2$.

$$z = x^2 + y^2 \text{ below } z = 4 \text{ (volume} = 8\pi)$$



בגליליות:

$$z = r^2 \quad \text{עד} \quad z = 4,$$

והחיתוך מתקבל מ- $r^2 = 4$, כלומר $0 \leq r \leq 2$. לכן

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r \, dz \, dr \, d\theta.$$

נחשב:

$$V = 2\pi \int_0^2 r(4 - r^2) \, dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi.$$

$$\boxed{V = 8\pi.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.3.

גוף כדורי ברדיוס R ממורכז בראשית, וצפיפותו התרמית היא

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 (1 + \alpha(x^2 + y^2 + z^2)), \quad \rho_0 > 0.$$

מצאו את המסה הכוללת.

פתרון.

עיקרון מנחה

התחום הוא כדור והצפיפות תלויה רק ב- ρ , המרחק מן הראשית. לכן כדוריות מבטלות כמעט את כל הקושי.

בכדוריות נגדיר

$$T(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi).$$

אז

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad J_T = \rho^2 \sin \varphi,$$

$$dV = \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta.$$

היעקוביאן מתאפס רק בראשית ועל הציר הפולרי, קבוצות נפח אפס. התחום:

$$0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

לכן

$$M = \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R (1 + \alpha \rho^2) \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta.$$

האינטגרלים הזוויתיים:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi, \quad \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2.$$

לכן

$$M = 4\pi\rho_0 \int_0^R (\rho^2 + \alpha\rho^4) d\rho = 4\pi\rho_0 \left(\frac{R^3}{3} + \alpha \frac{R^5}{5} \right).$$

$$M = 4\pi\rho_0 \left(\frac{R^3}{3} + \frac{\alpha R^5}{5} \right).$$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.4.

התחום

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

הוא כדור ברדיוס 2 שנחתך על ידי גליל ברדיוס 1 סביב ציר z . כתבו את התחום בקרטזית, בגלילית ובכדורית, והסבירו באיזו מערכת נוח לחשב את נפחו. חשבו את הנפח.

פתרון.

עיקרון מנחה

התחום מערב כדור וגליל. הקרטזית כבדה כי ההיטל כולל עיגול ובתוכו שורש. כדורית מתארת יפה את הכדור אך הגליל נעשה $\rho \sin \varphi \leq 1$. גלילית מתארת את הגליל בפשטות ואת הכדור כגבולות $z = \pm\sqrt{4-r^2}$, ולכן היא הבחירה הטבעית.

תיאור קרטזי.

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}.$$

תיאור גלילי.

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\sqrt{4-r^2} \leq z \leq \sqrt{4-r^2}.$$

תיאור כדורי.

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad \rho \sin \varphi \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

זה מחייב פיצול לפי φ , ולכן פחות נוח.חישוב בגליליות. כאן $T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, ולכן

$$J_T = r, \quad dV = r dz dr d\theta.$$

החריגה $r = 0$ היא ציר בעל נפח אפס.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 2r \sqrt{4-r^2} \, dr.$$

נציב $du = -2r \, dr$, $u = 4 - r^2$

$$\int_0^1 2r \sqrt{4-r^2} \, dr = \int_3^4 \sqrt{u} \, du = \frac{2}{3} \left(4^{3/2} - 3^{3/2} \right) = \frac{2}{3} (8 - 3\sqrt{3}).$$

לכן

$$V = \frac{4\pi}{3} (8 - 3\sqrt{3}).$$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.5.

מצאו את מרכז המסה של החרוט המלא

$$E = \{(r, \theta, z) : 0 \leq z \leq h, 0 \leq r \leq \frac{R}{h}z, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

כאשר הצפיפות קבועה.

פתרון.

עיקרון מנחה

החרוט סימטרי סביב ציר z , ולכן $\bar{x} = \bar{y} = 0$. נשאר לחשב את $\bar{z}$ באמצעות אינטגרל משולש בגליליות.

נניח צפיפות קבועה ρ_0 . המסה היא

$$M = \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{(R/h)z} r \, dr \, dz \, d\theta.$$

$$M = \rho_0 \cdot 2\pi \int_0^h \frac{1}{2} \left(\frac{R}{h}z \right)^2 dz = \rho_0 \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\rho_0 \pi R^2 h}{3}.$$

המומנט ביחס למישור xy :

$$M_z = \rho_0 \iiint_E z \, dV = \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{(R/h)z} zr \, dr \, dz \, d\theta.$$

$$M_z = \rho_0 \cdot 2\pi \int_0^h z \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{R}{h} z \right)^2 dz = \rho_0 \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{\rho_0 \pi R^2 h^2}{4}.$$

לכן

$$\bar{z} = \frac{M_z}{M} = \frac{\rho_0 \pi R^2 h^2 / 4}{\rho_0 \pi R^2 h / 3} = \frac{3h}{4}.$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{3h}{4} \right).$$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.6.

חשבו את מומנט ההתמד של כדור מלא אחיד ברדיוס R ובצפיפות ρ_0 , סביב ציר z .

פתרון.

עיקרון מנחה

מומנט ההתמד סביב ציר z הוא $\iiint_E (x^2 + y^2) \rho_0 dV$. בכדוריות מתקיים $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi$ והתחום פשוט מאוד.

$$I_z = \rho_0 \iiint_E (x^2 + y^2) dV.$$

בכדוריות:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi, \quad J_T = \rho^2 \sin \varphi,$$

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

היעקוביאן מתאפס בראשית ועל הציר הפולרי, קבוצות נפח אפס שאינן פוגעות באינטגרל. לכן

$$I_z = \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^4 \sin^3 \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

נחשב את הגורמים:

$$\int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{R^5}{5}, \quad \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi,$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi = \int_0^\pi \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{4}{3}.$$

לכן

$$I_z = \rho_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{8\pi\rho_0 R^5}{15}.$$

$$\text{אם } M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0, \text{ אז}$$

$$I_z = \frac{2}{5}MR^2.$$

$$I_z = \frac{8\pi\rho_0 R^5}{15} = \frac{2}{5}MR^2.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.7.

גליל מלא נתון על ידי

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

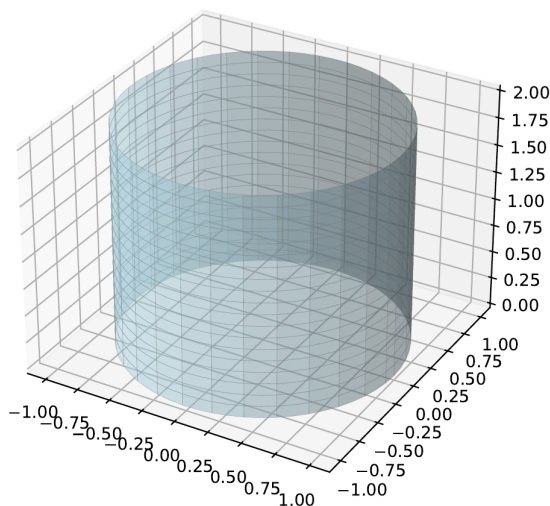
צפיפות המסה שלו היא

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right), \quad \rho_0 > 0.$$

מצאו את המסה הכוללת ואת מומנט ההתמד סביב ציר z .פתרון.

עיקרון מנחה

הצפיפות תלויה רק במרחק מציר z , והתחום הוא גליל. לכן קואורדינטות גליליות הן לא רק נוחות אלא כמעט הכרחיות. הסימטריה סביב הציר גם אומרת שאין צורך לחשב בנפרד תרומות שתלויות בזווית.

Cylinder $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2$ 

גליל עם סימטריה צירית: צפיפות רדיאלית מובילה לגבולות גליים פשוטים.

נעבור לקואורדינטות גליות:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad J_T = r.$$

לכן

$$dV = r \, dz \, dr \, d\theta.$$

היעקוביאן מתאפס רק על ציר z , קבוצה בעלת נפח אפס. הגבולות הם

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq h.$$

הצפיפות נעשית

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

לכן המסה היא

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h \rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) r \, dz \, dr \, d\theta.$$

נחשב:

$$M = 2\pi h \rho_0 \int_0^R \left(r + \frac{r^3}{R^2} \right) dr = 2\pi h \rho_0 \left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{4} \right) = \frac{3\pi \rho_0 h R^2}{2}.$$

מומנט ההתמד סביב ציר z הוא

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2) \rho \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r^2 \rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) r \, dz \, dr \, d\theta.$$

לכן

$$I_z = 2\pi h \rho_0 \int_0^R \left(r^3 + \frac{r^5}{R^2} \right) dr = 2\pi h \rho_0 \left(\frac{R^4}{4} + \frac{R^4}{6} \right) = \frac{5\pi \rho_0 h R^4}{6}.$$

$$M = \frac{3\pi \rho_0 h R^2}{2}, \quad I_z = \frac{5\pi \rho_0 h R^4}{6}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.8.

יהי

$$E = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 \leq z \leq h \right\}, \quad a, b, h > 0.$$

הצפיפות נתונה על ידי

$$\rho(x, y, z) = \rho_0(1 + \beta r^2),$$

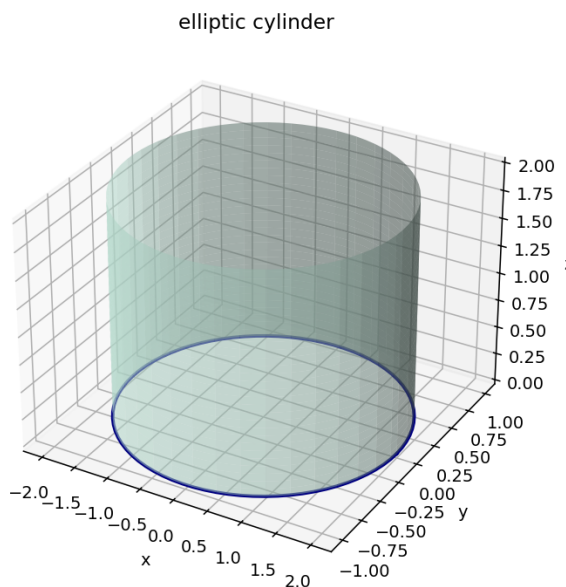
כאשר r הוא הרדיוס המוכלל המוגדר על ידי

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta,$$

ו- $\beta \geq 0$. מצאו את המסה של הגוף.פתרון.

עיקרון מנחה

התחום אינו גליל עגול אלא גליל אליפטי. לכן קואורדינטות גליליות רגילות יוצרות גבולות לא נוחים, ואילו הקואורדינטות המוכללות הופכות את החתך האליפטי לדיסק יחידה במשתנים r, θ .



גליל אליפטי: סקילינג שונה בצירי x, y הופך את החתך לדיסק יחידה.

נשתמש בהחלפה

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta, \quad z = z.$$

הגבולות הם

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h.$$

כאן

$$T(r, \theta, z) = (ar \cos \theta, br \sin \theta, z), \quad J_T = abr.$$

לכן

$$dV = abr \, dr \, d\theta \, dz.$$

היעקוביאן מתאפס רק ב- $r = 0$, הציר המוכלל, שהוא קבוצה בעלת נפח אפס. הצפיפות במשתנים החדשים היא

$$\rho = \rho_0(1 + \beta r^2).$$

לכן

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^h \rho_0(1 + \beta r^2) abr \, dz \, dr \, d\theta.$$

נחשב:

$$M = 2\pi abh\rho_0 \int_0^1 (r + \beta r^3) \, dr = 2\pi abh\rho_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{4} \right).$$

ולכן

$$M = \pi abh\rho_0 \left(1 + \frac{\beta}{2} \right).$$

כאשר $\beta = 0$ מתקבל $M = \rho_0 \pi a b h$, כלומר צפיפות קבועה כפול נפח הגליל האליפטי.

□

ניצחון

תרגיל 1.4.9.

יהי B חצי כדור עליון שמרכזו

$$C = (0, 0, a)$$

ורדיוסו R :

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq R^2, z \geq a\}.$$

צפיפות המטען המרחבית היא

$$\rho_e(x, y, z) = \rho_0 \frac{z - a}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}, \quad \rho_0 > 0.$$

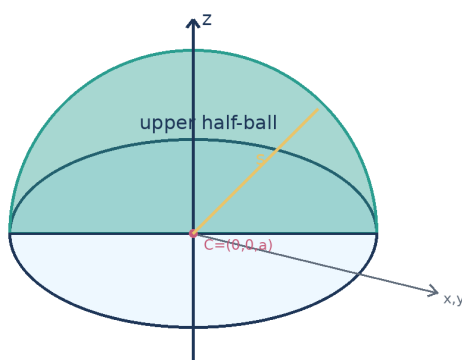
חשבו את המטען הכולל ב- B .

פתרון.

עיקרון מנחה

המרכז של הכדור אינו הראשית אלא $C = (0, 0, a)$. לכן נמדוד את המרחק מן המרכז C , ולא מן הראשית.

Shifted spherical coordinates



איור: חצי כדור עליון שמרכזו מוזז לנקודה $C = (0, 0, a)$.

נגדיר קואורדינטות כדוריות מוזזות:

$$x = s \sin \varphi \cos \theta, \quad y = s \sin \varphi \sin \theta, \quad z - a = s \cos \varphi.$$

לכן

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = s^2,$$

והיעקוביאן הוא

$$dV = s^2 \sin \varphi \, ds \, d\varphi \, d\theta.$$

החסם $z \geq a$ הופך ל-

$$s \cos \varphi \geq 0.$$

מאחר ש- $s \geq 0$, נקבל

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

התחום במשתנים החדשים הוא הקבוצה

$$\tilde{B} = \left\{ (s, \varphi, \theta) : 0 \leq s \leq R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

הצפיפות נעשית

$$\rho_e = \rho_0 \frac{s \cos \varphi}{s} = \rho_0 \cos \varphi.$$

לכן

$$Q = \iiint_B \rho_e \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho_0 \cos \varphi \cdot s^2 \sin \varphi \, ds \, d\varphi \, d\theta.$$

נפריד גורמים:

$$Q = \rho_0 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^R s^2 \, ds \right).$$

כעת

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}, \quad \int_0^R s^2 \, ds = \frac{R^3}{3}.$$

לכן

$$Q = \frac{\pi \rho_0 R^3}{3}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.10

בתחום $E \subset \mathbb{R}^3$ מתקיימים התנאים

$$1 \leq x + y + z \leq 3, \quad 0 \leq \frac{x}{x + y + z} \leq \frac{1}{4}, \quad 0 \leq \frac{y}{x + y + z} \leq \frac{1}{3}.$$

חשבו את האינטגרל

$$I = \iiint_E (x + y + z) \exp\left(-\frac{x}{x + y + z}\right) dV.$$

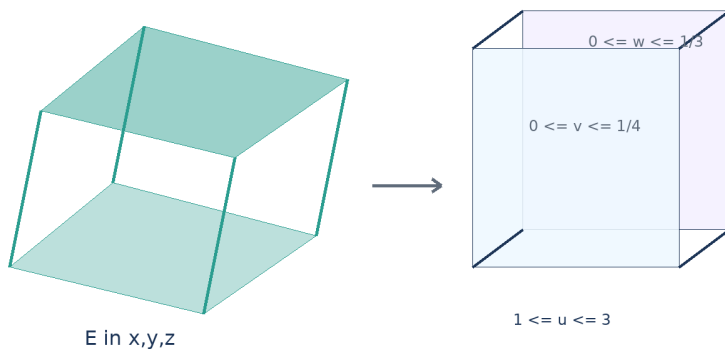
פתרו בעזרת תיאור מתאים של התחום וחישבו יעקוביאן מלא.

פתרון.

עיקרון מנחה

התנאים כבר מרמזים על שלושה גדלים טבעיים: הסכום הכולל, והחלק היחסי של x ושל y מתוך הסכום. לכן בפתרון נגדיר אותם כמשתנים חדשים ונחשב את היעקוביאן.

Three-variable Jacobian: skewed coordinates



איור: התחום המקורי נראה משופע, אבל במשתנים u, v, w הוא הופך לתיבה.

נגדיר

$$u = x + y + z, \quad v = \frac{x}{x + y + z}, \quad w = \frac{y}{x + y + z}.$$

התחום במשתנים החדשים הוא הקבוצה

$$\tilde{E} = \left\{ (u, v, w) : 1 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq \frac{1}{4}, 0 \leq w \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

מן ההגדרות מקבלים את ההעתקה ההפוכה:

$$x = uv, \quad y = uw, \quad z = u(1 - v - w).$$

כיוון ש

$$v + w \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} < 1,$$

מתקיים $z = u(1 - v - w) > 0$, ואין צורך בתנאי נוסף. נחשב את היעקוביאן:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{pmatrix} v & u & 0 \\ w & 0 & u \\ 1 - v - w & -u & -u \end{pmatrix}.$$

פיתוח הדטרמיננטה נותן

$$J = u^2.$$

לכן

$$dV = u^2 du dv dw.$$

האינטגרנד נעשה

$$(x + y + z) \exp\left(-\frac{x}{x + y + z}\right) = ue^{-v}.$$

לכן

$$I = \int_1^3 \int_0^{1/4} \int_0^{1/3} ue^{-v} \cdot u^2 dw dv du.$$

כלומר

$$I = \left(\int_1^3 u^3 du \right) \left(\int_0^{1/4} e^{-v} dv \right) \left(\int_0^{1/3} dw \right).$$

נחשב:

$$\int_1^3 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4} \right]_1^3 = 20,$$

$$\int_0^{1/4} e^{-v} dv = 1 - e^{-1/4}, \quad \int_0^{1/3} dw = \frac{1}{3}.$$

לכן

$$I = \frac{20}{3} (1 - e^{-1/4}).$$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.11

יהי $0 < a < R$. התחום E הוא החלק של הכדור

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

שנמצא בתוך הגליל

$$x^2 + y^2 \leq a^2.$$

צפיפות המטען היא

$$\rho_e(x, y, z) = \rho_0 \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right), \quad \rho_0 > 0.$$

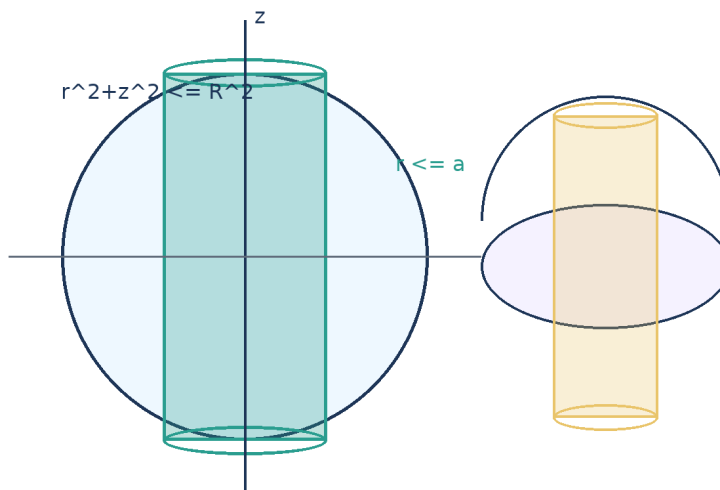
חשבו את נפח E ואת המטען הכולל Q הכלוא בו.

פתרון.

עיקרון מנחה

הגליל קובע את המרחק המקסימלי מציר z , והכדור קובע את הגובה העליון והתחתון. לכן נוח לקרוא את הגוף בחתך rz .

Cylinder inside a sphere



איור: החלק של הכדור שנמצא בתוך הגליל $r \leq a$.

נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad dV = r \, dz \, dr \, d\theta.$$

התחום במשתנים גליליים הוא הקבוצה

$$\tilde{E} = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, -\sqrt{R^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - r^2} \right\}.$$

נפח.

$$V_E = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{-\sqrt{R^2 - r^2}}^{\sqrt{R^2 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

האינטגרציה לפי z נותנת

$$V_E = 2\pi \int_0^a 2r \sqrt{R^2 - r^2} \, dr = 4\pi \int_0^a r \sqrt{R^2 - r^2} \, dr.$$

נציב

$$u = R^2 - r^2, \quad du = -2r \, dr.$$

או

$$\int_0^a r \sqrt{R^2 - r^2} \, dr = \frac{1}{3} \left(R^3 - (R^2 - a^2)^{3/2} \right).$$

ולכן

$$V_E = \frac{4\pi}{3} \left(R^3 - (R^2 - a^2)^{3/2} \right).$$

מטען. בגליליות הצפיפות היא

$$\rho_e = \rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right).$$

לכן

$$Q = 4\pi\rho_0 \left[\int_0^a r \sqrt{R^2 - r^2} \, dr + \frac{1}{a^2} \int_0^a r^3 \sqrt{R^2 - r^2} \, dr \right].$$

נסמן

$$L = \sqrt{R^2 - a^2}.$$

כבר חישבנו

$$\int_0^a r \sqrt{R^2 - r^2} \, dr = \frac{R^3 - L^3}{3}.$$

כעת

$$\int_0^a r^3 \sqrt{R^2 - r^2} \, dr = \frac{1}{2} \int_{R^2 - a^2}^{R^2} (R^2 - u) u^{1/2} \, du.$$

ולכן

$$\int_0^a r^3 \sqrt{R^2 - r^2} \, dr = \frac{2R^5}{15} - \frac{R^2 L^3}{3} + \frac{L^5}{5}.$$

בסך הכול

$$Q = 4\pi\rho_0 \left[\frac{R^3 - L^3}{3} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{2R^5}{15} - \frac{R^2 L^3}{3} + \frac{L^5}{5} \right) \right], \quad L = \sqrt{R^2 - a^2}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.12

לפניכם שני ניסוחים קרובים, אבל הם אינם זהים.

נוסח א: תחום חסום באופן כללי.

חשבו את נפח הגוף החסום על ידי שלושת המשטחים

$$z = 0, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0.$$

נוסח ב: תחום מעל פרבולואיד ומתחת לחצי כדור עליון.

חשבו את נפח הגוף הנמצא מעל הפרבולואיד

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

ומתחת לחצי הכדור העליון

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0.$$

בפתרון נחשב את שני הנוסחים ונראה בדיוק מה ההבדל ביניהם.

פתרון.

עיקרון מנחה

ההבדל הוא במילה "חסום". בנוסח א יש שלושה משטחים: המישור $z = 0$, הפרבולואיד, וחצי הכדור העליון. הם סוגרים תחום גדול יותר. בנוסח ב אומרים במפורש שהגוף נמצא מעל הפרבולואיד ומתחת לחצי הכדור, ולכן בוחרים רק את החלק שבין שני הגרפים האלה.

נשתמש בקואורדינטות גליליות:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

לכן הפרבולואיד הוא

$$z = \frac{r^2}{2},$$

וחצי הכדור העליון הוא

$$z = \sqrt{4 - r^2}.$$

קודם מוצאים את נקודת החיתוך של שני הגרפים בחתך rz :

$$\frac{r^2}{2} = \sqrt{4 - r^2}.$$

נעלה בריבוע:

$$\frac{r^4}{4} = 4 - r^2.$$

נסמן $t = r^2$ אז

$$t^2 + 4t - 16 = 0.$$

השורש החיובי הוא

$$t = 2(\sqrt{5} - 1),$$

ולכן

$$r_0 = \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}.$$

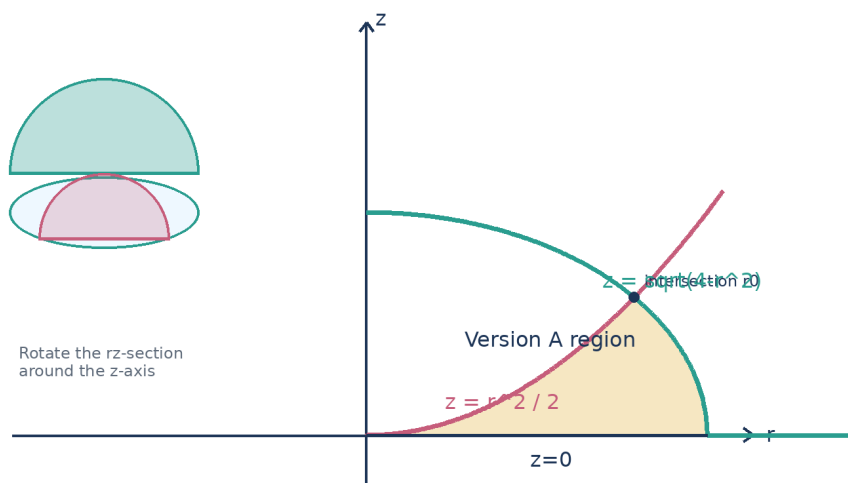
נוח גם לסמן

$$\beta = \sqrt{5} - 1, \quad r_0^2 = 2\beta.$$

גובה החיתוך הוא

$$z_0 = \frac{r_0^2}{2} = \beta.$$

נוסח א: הגוף החסום על ידי שלושת המשטחים.

Version A: bounded by $z=0$, paraboloid, and upper sphereאיור: נוסח א. התחום נמצא מעל $z=0$, ומתחת למשטח הנמוך יותר מבין הפרבולואיד והכדור.בחתך rz , הגוף של נוסח א נמצא מעל הציר $z=0$. התקרה שלו משתנה: בהתחלה הפרבולואיד נמוך יותר מן הכדור, ואחרי נקודת החיתוך הכדור נמוך יותר מן הפרבולואיד.דרך א: פיצול לפי r .לפי חתכים אנכיים בחתך rz , ההיטל מתפצל לשני חלקים:

$$A_1 = \left\{ (r, z) : 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq z \leq \frac{r^2}{2} \right\},$$

$$A_2 = \left\{ (r, z) : r_0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2} \right\}.$$

אחרי סיבוב סביב ציר z , התחום בגליליות הוא איחוד של שתי קבוצות:

$$\tilde{E}_A = E_{A,1} \cup E_{A,2},$$

כאשר

$$E_{A,1} = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq z \leq \frac{r^2}{2} \right\},$$

$$E_{A,2} = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, r_0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2} \right\}.$$

היעקוביאן בגלילות הוא r , ולכן

$$V_A = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \int_0^{r^2/2} r \, dz \, dr \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

נחשב את החלק הראשון:

$$V_{A,1} = 2\pi \int_0^{r_0} r \cdot \frac{r^2}{2} \, dr = \pi \int_0^{r_0} r^3 \, dr = \frac{\pi r_0^4}{4}.$$

מאחר ש- $r_0^2 = 2\beta$, נקבל

$$r_0^4 = 4\beta^2,$$

ולכן

$$V_{A,1} = \pi\beta^2.$$

עכשיו החלק השני:

$$V_{A,2} = 2\pi \int_{r_0}^2 r \sqrt{4-r^2} \, dr.$$

נשתמש באינטגרל

$$\int r \sqrt{4-r^2} \, dr = -\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}.$$

לכן

$$V_{A,2} = 2\pi \cdot \frac{1}{3}(4-r_0^2)^{3/2}.$$

אבל

$$4-r_0^2 = 4-2(\sqrt{5}-1) = 6-2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)^2 = \beta^2.$$

לכן

$$V_{A,2} = \frac{2\pi}{3}\beta^3.$$

בסך הכול

$$V_A = \pi\beta^2 + \frac{2\pi}{3}\beta^3.$$

נציב $\beta = \sqrt{5}-1$. לאחר פישוט:

$$V_A = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-7).$$

דרך ב: בלי פיצול, תחום פשוט ביחס ל- z .

עכשיו מסתכלים על חתכים אופקיים בחתך rz . עבור גובה קבוע z , התנאי להיות מתחת לפרבולואיד הוא

$$z \leq \frac{r^2}{2}.$$

כלומר

$$r \geq \sqrt{2z}.$$

מצד שני, כדי להיות בתוך חצי הכדור העליון:

$$r^2 + z^2 \leq 4.$$

כלומר

$$r \leq \sqrt{4 - z^2}.$$

גובה התחום נע מ-0 עד גובה החיתוך:

$$0 \leq z \leq \beta.$$

לכן התחום בגליליות הוא

$$\tilde{E}_A = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \beta, \sqrt{2z} \leq r \leq \sqrt{4 - z^2} \right\}.$$

ולכן

$$V_A = \int_0^{2\pi} \int_0^\beta \int_{\sqrt{2z}}^{\sqrt{4-z^2}} r \, dr \, dz \, d\theta.$$

האינטגרציה לפי r נותנת

$$\int_{\sqrt{2z}}^{\sqrt{4-z^2}} r \, dr = \frac{1}{2} [(4 - z^2) - 2z].$$

לכן

$$V_A = 2\pi \int_0^\beta \frac{1}{2} (4 - z^2 - 2z) \, dz.$$

כלומר

$$V_A = \pi \int_0^\beta (4 - z^2 - 2z) \, dz.$$

נחשב:

$$V_A = \pi \left[4z - \frac{z^3}{3} - z^2 \right]_0^\beta.$$

לכן

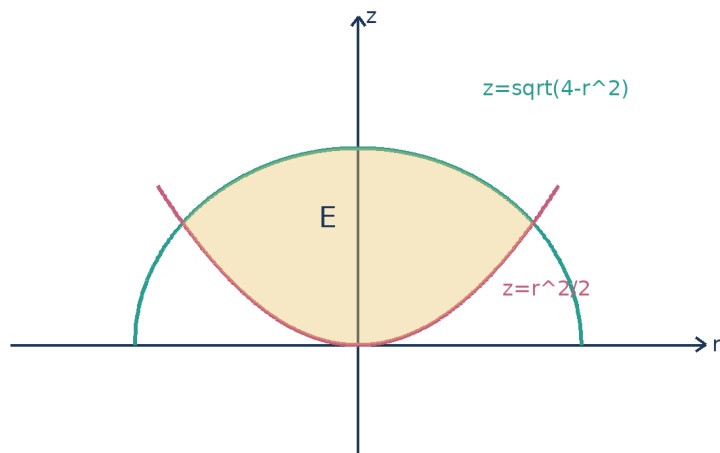
$$V_A = \pi \left(4\beta - \frac{\beta^3}{3} - \beta^2 \right).$$

כאשר $\beta = \sqrt{5} - 1$, מקבלים שוב

$$V_A = \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 7).$$

נוסח ב: מעל הפרבולואיד ומתחת לחצי הכדור העליון.

Side section: paraboloid below sphere



איור: נוסח ב. התחום נמצא בין הפרבולואיד לבין חצי הכדור העליון.

כאן אומרים במפורש שהגוף מעל הפרבולואיד ומתחת לחצי הכדור. לכן אין פיצול לשני אזורים. ההיטל על מישור rz הוא

$$B = \left\{ (r, z) : 0 \leq r \leq r_0, \frac{r^2}{2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\}.$$

התחום בגליליות הוא

$$\tilde{E}_B = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq r_0, \frac{r^2}{2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\}.$$

לכן

$$V_B = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \int_{r^2/2}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

כלומר

$$V_B = 2\pi \int_0^{r_0} r \left(\sqrt{4 - r^2} - \frac{r^2}{2} \right) dr.$$

כעת נחשב:

$$V_B = 2\pi \left[\int_0^{r_0} r \sqrt{4 - r^2} \, dr - \int_0^{r_0} \frac{r^3}{2} \, dr \right].$$

האינטגרל הראשון:

$$\int_0^{r_0} r \sqrt{4 - r^2} \, dr = \frac{1}{3} \left(8 - (4 - r_0^2)^{3/2} \right).$$

כבר ראינו ש-

$$4 - r_0^2 = \beta^2,$$

ולכן

$$(4 - r_0^2)^{3/2} = \beta^3.$$

האינטגרל השני:

$$\int_0^{r_0} \frac{r^3}{2} dr = \frac{r_0^4}{8} = \frac{4\beta^2}{8} = \frac{\beta^2}{2}.$$

לכן

$$V_B = 2\pi \left[\frac{8 - \beta^3}{3} - \frac{\beta^2}{2} \right].$$

כאשר $\beta = \sqrt{5} - 1$, לאחר פישוט מתקבל

$$V_B = \frac{10\pi}{3}(3 - \sqrt{5}).$$

סיכום ההבדל.

בנוסף א מחשבים את התחום שמעל $z = 0$ ומתחת למשטח הנמוך יותר מבין הפרבולואיד והכדור. לכן בחתכים לפי r יש פיצול, אבל בחתכים לפי z אפשר לכתוב תחום פשוט. בנוסף מחשבים רק את האזור שבין הפרבולואיד לכדור. כלומר התחתית היא הפרבולואיד והתקרה היא חצי הכדור העליון.

□

ניצחון**תרגיל 1.4.13.**

חשבו את נפח הגוף החסום על ידי הגרפים

$$z = 0, \quad z = 5 - x^2 - y^2,$$

בתוך הגליל

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5} = 1,$$

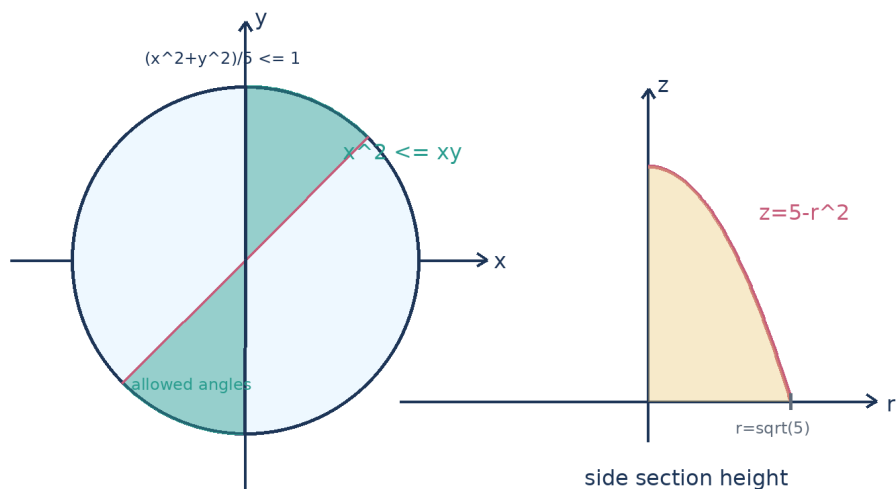
ובחלק של המישור המקיים

$$x^2 \leq xy.$$

פתרון.**עיקרון מנחה**

למרות שהגליל כתוב עם שברים, שני המכנים שווים. לכן זה עדיין מעגל במישור xy , כלומר יש כאן סימטריה סביב ציר z . התנאי $x^2 \leq xy$ אינו תנאי על גובה, אלא תנאי על הזווית במישור.

Circular symmetry with a nontrivial angle condition



איור: מבט על במישור xy עבור התנאי הזוויתי, וחתך צדדי עבור הגובה.

נכתוב את הגליל בצורה פשוטה יותר:

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5} \leq 1 \iff x^2 + y^2 \leq 5.$$

לכן בגליליות זהו פשוט התנאי

$$0 \leq r \leq \sqrt{5}.$$

הגרף העליון הוא

$$z = 5 - x^2 - y^2 = 5 - r^2,$$

והגרף התחתון הוא

$$z = 0.$$

עכשיו נשאר להבין את התנאי במישור:

$$x^2 \leq xy.$$

נציב

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

אז עבור $r > 0$:

$$r^2 \cos^2 \theta \leq r^2 \sin \theta \cos \theta.$$

נחלק ב- r^2 :

$$\cos^2 \theta \leq \sin \theta \cos \theta.$$

נעביר אגף:

$$\cos \theta (\cos \theta - \sin \theta) \leq 0.$$

מכאן מקבלים שני תחומי זוויות:

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}.$$

הנקודה $r = 0$ אינה משנה את הנפח, ולכן אפשר להתעלם ממנה בגבולות. לכן התחום בגליליות הוא איחוד של שתי קבוצות:

$$\tilde{E}_1 = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq r \leq \sqrt{5}, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 5 - r^2 \right\},$$

$$\tilde{E}_2 = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq r \leq \sqrt{5}, \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}, 0 \leq z \leq 5 - r^2 \right\}.$$

שני תחומי הזוויות באותו אורך, וכל אחד מהם באורך $\pi/4$. לכן האורך הכולל בזווית הוא

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

היעקוביאן בגליליות הוא r , ולכן

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{5-r^2} r \, dz \, dr.$$

האינטגרציה לפי z נותנת

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{5}} r(5 - r^2) \, dr.$$

כעת

$$\int_0^{\sqrt{5}} r(5 - r^2) \, dr = \left[\frac{5r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{5}} = \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4}.$$

לכן

$$V = \frac{25\pi}{8}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.14.

בתיבה

$$[-h, h] \times [-h, h] \times [0, h]$$

נמצא חרוט מלא שקודקודו בראשית וצירו ציר z :

$$E = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq z^2\}.$$

צפיפות המטען היא

$$\rho_e(x, y, z) = \frac{\rho_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \rho_0 > 0.$$

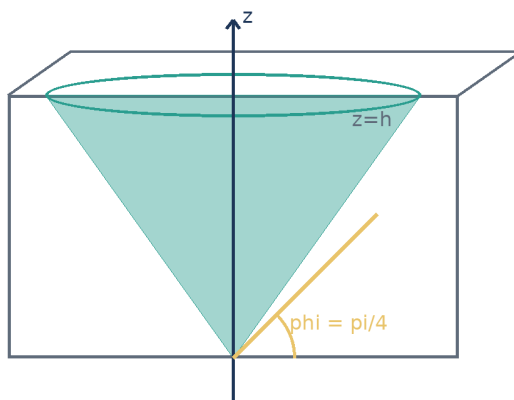
חשבו את המטען הכולל הכלוא בחרוט.

פתרון.

עיקרון מנחה

חרוט שקודקודו בראשית הוא אוסף של קרניים שיוצאות מן הראשית באותה זווית מקסימלית. לכן בכדוריות הוא נכתב כתנאי פשוט על הזווית φ .

Cone inside a box: spherical angle is constant

איור: החרוט נמצא בתוך התיבה, והגבול שלו נקבע על ידי הזווית $\varphi = \pi/4$.

בקואורדינטות כדוריות:

$$x = s \sin \varphi \cos \theta, \quad y = s \sin \varphi \sin \theta, \quad z = s \cos \varphi.$$

היעקוביאן הוא

$$dV = s^2 \sin \varphi \, ds \, d\varphi \, d\theta.$$

החרוט

$$x^2 + y^2 \leq z^2$$

הופך ל-

$$s^2 \sin^2 \varphi \leq s^2 \cos^2 \varphi.$$

בתחום $z \geq 0$, כלומר

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

נקבל

$$\tan \varphi \leq 1 \iff 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

החסם $z \leq h$ נותן

$$s \cos \varphi \leq h \iff 0 \leq s \leq \frac{h}{\cos \varphi}.$$

אין מגבלה נוספת מן התיבה, כי בתוך החרוט מתקיים $r \leq z \leq h$, ולכן

$$|x| \leq r \leq h, \quad |y| \leq r \leq h.$$

לכן התחום בכדוריות הוא הקבוצה

$$\tilde{E} = \left\{ (s, \varphi, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq s \leq \frac{h}{\cos \varphi} \right\}.$$

הצפיפות נעשית

$$\rho_e = \frac{\rho_0}{s}.$$

לכן

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{h/\cos \varphi} \frac{\rho_0}{s} \cdot s^2 \sin \varphi \, ds \, d\varphi \, d\theta.$$

כלומר

$$Q = \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{h/\cos \varphi} s \sin \varphi \, ds \, d\varphi \, d\theta.$$

האינטגרציה לפי s נותנת

$$\int_0^{h/\cos \varphi} s \, ds = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\cos^2 \varphi}.$$

לכן

$$Q = \rho_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{h^2}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi.$$

אבל

$$\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = \sec \varphi \tan \varphi,$$

ולכן

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi = [\sec \varphi]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1.$$

מכאן

$$Q = \pi \rho_0 h^2 (\sqrt{2} - 1).$$

□

ניצחון