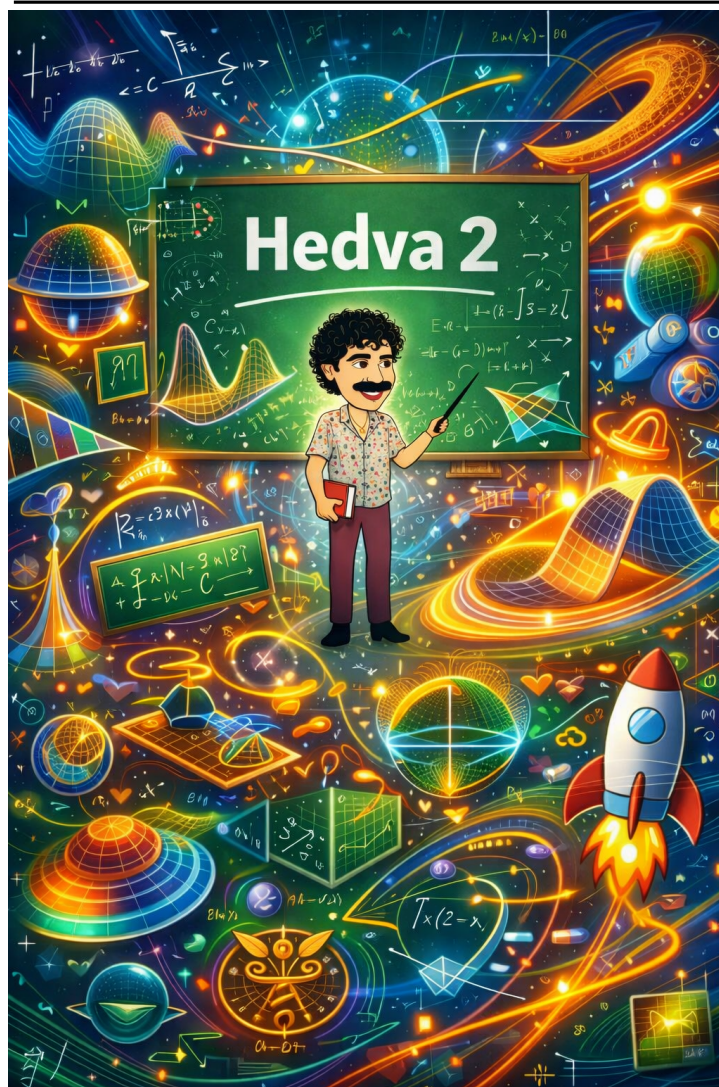


חדו"א 2 להנדסות

סיכומים ותרגולים



נערך ונכתב על ידי חן גדי ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המצויב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

נוצר על ידי חוג גדי

תוכן העניינים

2	1 תרגול 11: עקומים פרמטריים, אינטגרלים קווים ומשפט גרין
2	1.1 עקומים, מהירות ואורך קשת
8	1.2 אינטגרלים קווים
18	1.3 שדות משמרים ופוטנציאלים
27	1.4 משפט גרין, סירקולציה ותחומים עם חור
34	1.5 תרגילים נוספים: אינטגרלים קווים ומשפט גרין

תרגול 11: עקומים פרמטריים, אינטגרלים קוויים ומשפט גרין

עיקרון מנחה

עקומה פרמטרית מתארת תנועה. הנגזרת שלה היא וקטור מהירות, גודל הנגזרת הוא מהירות, ואינטגרלים קוויים מסכמים מידע לאורך הדרך. כאשר השדה משמר, העבודה תלויה רק בנקודות ההתחלה והסיום. כאשר התחום מכיל חור או סינגולריות, אותה בדיקה מקומית עלולה להטעות, ומשפט גרין מסביר את הקשר בין אינטגרל קווי לבין סיבוב פנימי של השדה.

1.1 עקומים, מהירות ואורך קשת

הגדרה פורמלית

עקומה פרמטרית. עקומה במישור או במרחב ניתנת על ידי

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{או} \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

אם $\vec{r} \in C^1$ ו- $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, העקומה רגולרית. העקומה עצמה היא התמונה של הפרמטריזציה, כלומר קבוצת הנקודות שבהן עוברים כאשר t נע בקטע. פרמטריזציות שונות יכולות לתאר אותה עקומה במהירות אחרת או בכיוון אחר.

הגדרה פורמלית

וקטור משיק, מהירות ואורך קשת.

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

הוא וקטור משיק. גודלו

$$\|\vec{r}'(t)\|$$

הוא המהירות. אורך הקשת הוא

$$L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

הנוסחה מתקבלת כגבול של קירובים מצולעים: מחלקים את הקטע $a \leq t \leq b$, מחברים את הנקודות על העקומה במקטעים ישרים, וסוכמים את אורכי המקטעים. כאשר גודל החלוקה שואף לאפס, הסכום מתכנס לאינטגרל המהירות.

הגדרה פורמלית

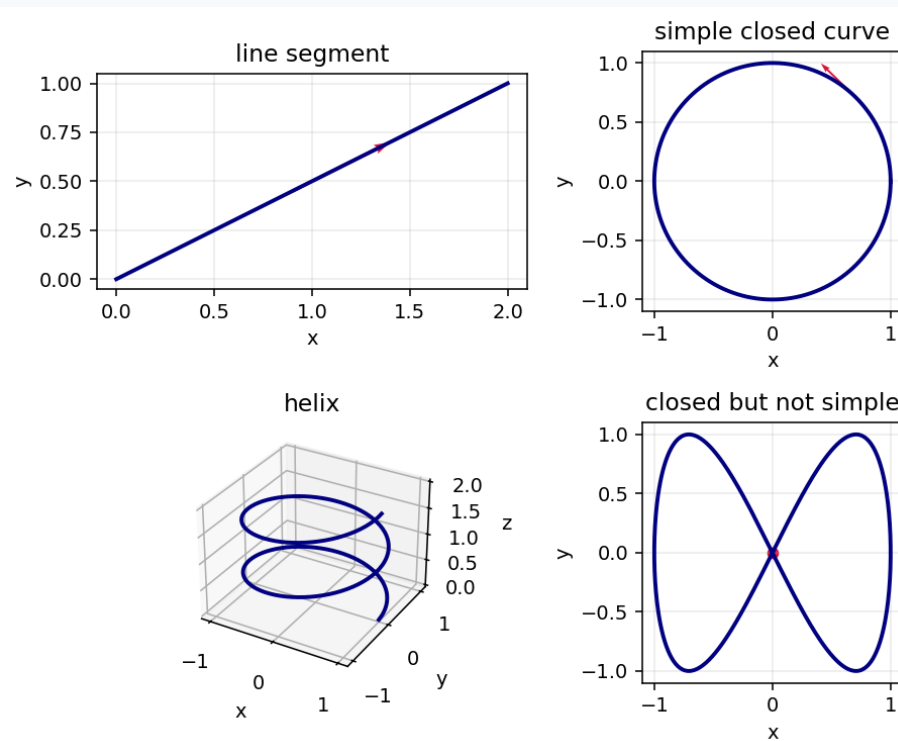
עקומה סגורה ופשוטה. עקומה היא סגורה אם

$$\vec{r}(a) = \vec{r}(b).$$

היא פשוטה אם אין לה חיתוכים עצמיים, כלומר אין שתי נקודות פרמטר שונות שנותנות אותה נקודה על העקומה, פרט לחפיפה ההכרחית של ההתחלה והסוף בעקומה סגורה. עקומה פשוטה וסגורה היא עקומה סגורה ללא חיתוכים עצמיים.

הערה קטנה ומועילה

דוגמאות בסיסיות לעקומות. קטע ישר, מעגל, בורגי(הליקס) ועקומת שמונה הם ארבעה דפוסים שכדאי לזהות. קטע ישר אינו סגור, מעגל הוא פשוט וסגור, בורגי(הליקס) אינו עקום מישורי ואינו סגור בקטע הנתון בדרך כלל, ועקומת שמונה יכולה להיות סגורה אך לא פשוטה.



קטע ישר, מעגל, בורגי(הליקס) ועקומה סגורה שאינה פשוטה.

תרגילים: עקומים, רגולריות ואורך קשת

תרגיל 1.1.1.

חשבו את אורך הקשת של הבורגי(הליקס)

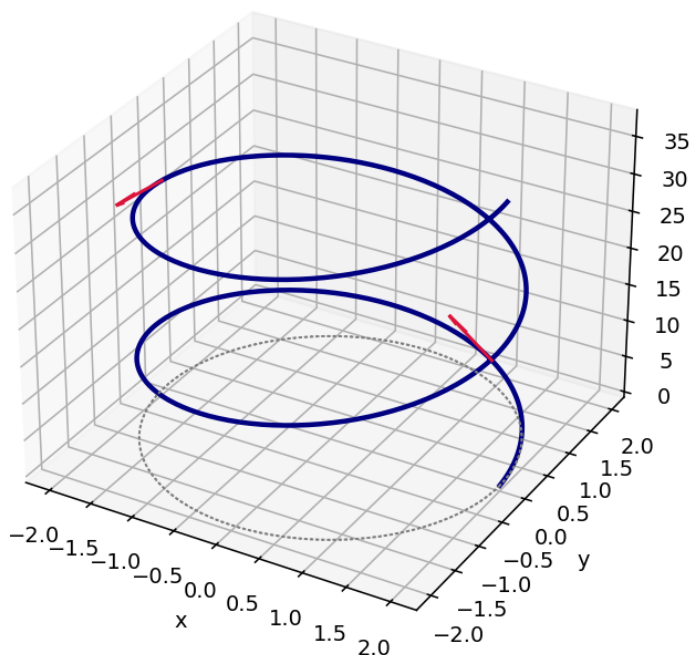
$$\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 3t), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

אורך קשת הוא אינטגרל של המהירות. בבורגי(הליקס) המהירות קבועה, ולכן החישוב קצר.

3D helix with tangent vectors



מסלול בורגי: התנועה מסתובבת סביב הציר ובמקביל עולה בגובה.

$$\vec{r}'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 3).$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 9} = \sqrt{13}.$$

לכן

מכאן

$$L = \int_0^{4\pi} \sqrt{13} dt = 4\pi\sqrt{13}.$$

$$L = 4\pi\sqrt{13}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.1.2.

עבור כל אחת מן הפרמטריזציות הבאות קבעו האם העקומה רגולרית, האם היא סגורה, והאם היא פשוטה:

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$C_2 : \vec{r}_2(t) = (\cos 2t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$C_3 : \vec{r}_3(t) = (t^2, t^3), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

לפני שמחשבים אינטגרל קווי צריך להבין מהי העקומה עצמה: האם יש כיוון מוגדר בכל נקודה, האם מתחילים ומסיימים באותה נקודה, והאם יש חיתוכים עצמיים. זו בדיקה גיאומטרית בסיסית, אבל היא מונעת טעויות באוריינטציה ובהפעלת משפט גרין.

העקומה C_1 . מתקיים

$$\vec{r}_1(0) = (1, 0) = \vec{r}_1(2\pi),$$

ולכן העקומה סגורה. הנגזרת היא

$$\vec{r}_1'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

ולכן

$$\|\vec{r}_1'(t)\| = 1 \neq 0$$

לכל t . לכן היא רגולרית. זוהי מעגל היחידה, והוא פשוט וסגור, מפני שאין חיתוך עצמי מלבד החזרה לנקודת ההתחלה בסוף הפרמטר.

העקומה C_2 . מתקיים

$$\vec{r}_2(0) = (1, 0) = \vec{r}_2(2\pi),$$

ולכן היא סגורה. הנגזרת היא

$$\vec{r}_2'(t) = (-2\sin 2t, \cos t).$$

בנקודה $t = \frac{\pi}{2}$ מקבלים

$$\vec{r}'_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0),$$

ולכן הפרמטריזציה אינה רגולרית. בנוסף,

$$\vec{r}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 1), \quad \vec{r}_2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (-1, -1),$$

ואלה נקודות שונות, אך לעקומה יש חיתוך עצמי ב-

$$\vec{r}_2(0) = (1, 0) = \vec{r}_2(2\pi)$$

בגלל הסגירות בלבד, ובנוסף הצורה הכללית היא דמוית שמונה. כדי לראות את אי הפשטות באופן ישיר, פותרים $\cos 2t_1 = \cos 2t_2$ ו- $\sin t_1 = \sin t_2$ למשל $t_1 = \frac{\pi}{6}$, $t_2 = \frac{5\pi}{6}$ נותנים

$$\sin t_1 = \sin t_2 = \frac{1}{2}, \quad \cos(2t_1) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\cos(2t_2) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

לכן $\vec{r}_2(t_1) = \vec{r}_2(t_2)$ עם $t_1 \neq t_2$, והעקומה אינה פשוטה. **העקומה C_3** נקודות הקצה הן

$$\vec{r}_3(-1) = (1, -1), \quad \vec{r}_3(1) = (1, 1),$$

ולכן העקומה אינה סגורה. הנגזרת היא

$$\vec{r}'_3(t) = (2t, 3t^2),$$

וב-

$$t = 0$$

מתקבל $\vec{r}'_3(0) = (0, 0)$, ולכן הפרמטריזציה אינה רגולרית. מצד שני, מן המשוואה $y = t^3$, $x = t^2$ אפשר לשחזר את t מתוך היחס $y/x = t$, כאשר $t \neq 0$, ובנקודה $(0, 0)$ מתקבל רק $t = 0$. לכן אין חיתוך עצמי, והעקומה פשוטה.

□

ניצחון

1.2 אינטגרלים קוויים

מה מודד אינטגרל קווי?

הגדרה פורמלית

אינטגרל קווי מסוג ראשון. אם f פונקציה סקלרית רציפה על C , ו- $\vec{r}$ פרמטריזציה של C , אז

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| \, dt.$$

האינטגרל מסכם צפיפות סקלרית לאורך עקומה: מסה של תיל אם f צפיפות מסה ליחידת אורך, מטען כולל על תיל אם f צפיפות מטען, או עלות מצטברת לאורך מסלול. הגורם

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| \, dt$$

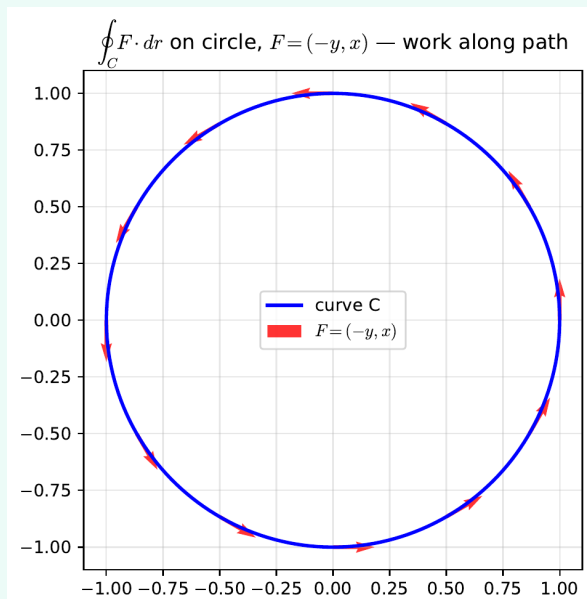
מופיע מפני שבזמן קטן dt עוברים אורך קטן בקירוב $\|\vec{r}'(t)\| \, dt$. כיוון המעבר אינו משנה את ds , ולכן אינטגרל מסוג ראשון אינו תלוי באוריינטציה.

הגדרה פורמלית

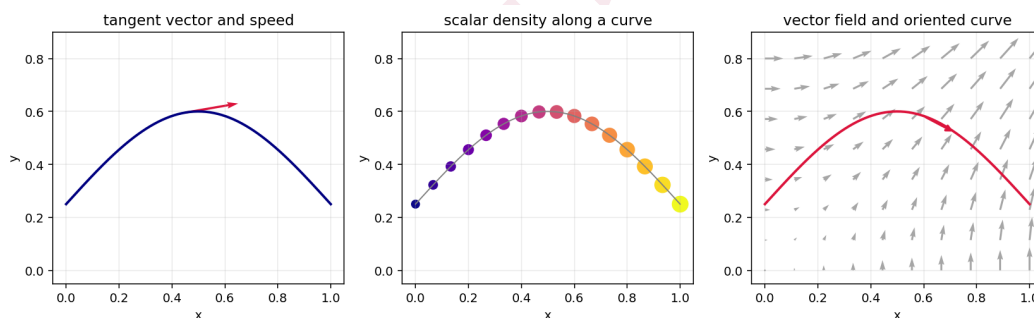
אינטגרל קווי מסוג שני. אם $\vec{F}$ שדה וקטורי רציף, אז

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, dt.$$

האינטגרל מסכם את הרכיב של השדה בכיוון התנועה. בפיזיקה זהו עבודה של שדה כוח לאורך מסלול, ובזרימה זהו מדד לסירקולציה או לרכיב המשיק של שדה מהירויות. כאן האוריינטציה חשובה: אם הפכים את כיוון העקומה, הווקטור המשיק משתנה סימן ולכן האינטגרל משתנה סימן.



באינטגרל מסוג שני מודדים את הרכיב של השדה בכיוון התנועה.



משמאל: וקטור משיק ומהירות. באמצע: צפיפות סקלרית לאורך עקומה. מימין: שדה וקטורי ועקומה מכוונת.

הערה קטנה ומועילה

סוג ראשון מול סוג שני.

שימוש טיפוסי	תלוי בכיוון	נוסחה	מה מסכמים	סוג ראשון
מסה, מטען, עלות לאורך דרך	לא	$\int_C f ds$	צפיפות סקלרית	סוג ראשון
עבודה, סירקולציה	כן	$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$	רכיב משיק של שדה	סוג שני

הערה קטנה ומועילה

היפוך אוריינטציה. אם C^- היא אותה עקומה בכיוון ההפוך, אז

$$\int_{C^-} f \, ds = - \int_C f \, ds,$$

אבל

$$\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

הסיבה היא ש- ds הוא אורך חיובי, ואילו $d\vec{r}$ הוא וקטור מכוון.

הערה קטנה ומועילה

פרמטריזציות שימושיות.

- קטע מ- A ל- B : $\vec{r}(t) = A + t(B - A)$, $0 \leq t \leq 1$.
- מעגל ברדיוס R : $\vec{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- גרף $y = g(x)$: $\vec{r}(t) = (t, g(t))$.
- בורג (הליקס): $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$.

תרגילים: אינטגרלים קוויים מסוג ראשון ושני

תרגיל 1.2.1.

חשבו

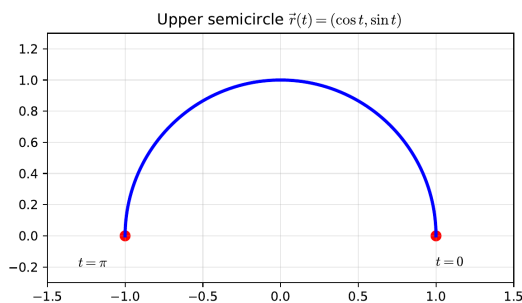
$$\int_C (x^2 + y^2) ds$$

כאשר C הוא חצי המעגל העליון $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$.

פתרון.

עיקרון מנחה

על המעגל $x^2 + y^2 = 4$ האינטגרנד קבוע. לכן האינטגרל הוא הקבוע כפול אורך חצי המעגל.



פרמטריזציה:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t), & 0 \leq t \leq \pi. \\ \vec{r}'(t) &= (-2 \sin t, 2 \cos t), & \|\vec{r}'(t)\| = 2.\end{aligned}$$

על העקומה:

$$x^2 + y^2 = 4.$$

לכן

$$\int_C (x^2 + y^2) ds = \int_0^\pi 4 \cdot 2 dt = 8\pi.$$

$$\boxed{8\pi.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.2.

חשבו את העבודה של השדה

$$\vec{F}(x, y) = (y, x)$$

לאורך המסלול מן $(0, 0)$ ל- $(1, 1)$ בשתי דרכים: הקטע הישר C_1 , והפרבולה $C_2 : \vec{r}(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$. הסיקו האם השדה משמר.

פתרון.

עיקרון מנחה

נחשב ישירות בשני מסלולים. אם התוצאות שוות זה עדיין לא מוכיח שמרניות, אך כאן נוכל גם למצוא פוטנציאל.

הקטע הישר.

$$\vec{r}_1(t) = (t, t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \vec{r}_1'(t) = (1, 1).$$

$$\vec{F}(\vec{r}_1(t)) = (t, t).$$

לכן

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t, t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 2t dt = 1.$$

הפרבולה.

$$\vec{r}_2(t) = (t, t^2), \quad \vec{r}_2'(t) = (1, 2t).$$

$$\vec{F}(\vec{r}_2(t)) = (t^2, t).$$

לכן

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^2, t) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 (3t^2) dt = 1.$$

אכן השדה משמר, כי

$$\phi(x, y) = xy, \quad \nabla \phi = (y, x).$$

לכן כל מסלול מן $(0, 0)$ ל- $(1, 1)$ נותן

$$\phi(1, 1) - \phi(0, 0) = 1.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.3.

חשבו את העבודה של השדה

$$\vec{F}(x, y) = (-y, 0)$$

מן $(0, 0)$ ל- $(1, 1)$ לאורך שני מסלולים:

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

ו

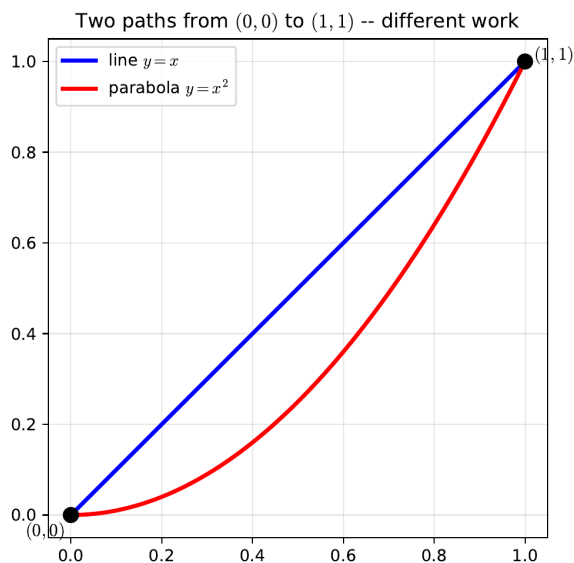
$$C_2 : \vec{r}_2(t) = (t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

הסיקו שהשדה אינו משמר.

פתרון.

עיקרון מנחה

בשדה משמר העבודה תלויה רק בנקודות הקצה. לכן שתי תוצאות שונות עבור אותם קצות מספיקות כדי להוכיח שהשדה אינו משמר. כאן ההבדל נובע מכך שהשדה מודד את הרכיב האופקי, והרכיב הזה משתנה לפי הגובה y לאורך הדרך.



שני מסלולים בין אותן נקודות קצה. בשדה שאינו משמר העבודה עשויה להשתנות.

הקטע הישר.

$$\vec{r}_1(t) = (t, t), \quad \vec{r}_1'(t) = (1, 1).$$

$$\vec{F}(\vec{r}_1(t)) = (-t, 0).$$

לכן

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (-t, 0) \cdot (1, 1) dt = - \int_0^1 t dt = -\frac{1}{2}.$$

הפרבולה.

$$\vec{r}_2(t) = (t, t^2), \quad \vec{r}_2'(t) = (1, 2t). \\ \vec{F}(\vec{r}_2(t)) = (-t^2, 0).$$

לכן

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (-t^2, 0) \cdot (1, 2t) dt = - \int_0^1 t^2 dt = -\frac{1}{3}.$$

קיבלנו

$$-\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{3}.$$

לכן העבודה תלויה במסלול, ומכאן

אינו שדה משמר. $\vec{F}$

אפשר לראות זאת גם מן הבדיקה המקומית:

$$P = -y, \quad Q = 0, \quad P_y = -1, \quad Q_x = 0.$$

במישור פשוט קשיר, שדה משמר חייב לקיים $P_y = Q_x$, וכאן התנאי נכשל.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.4.

יהי

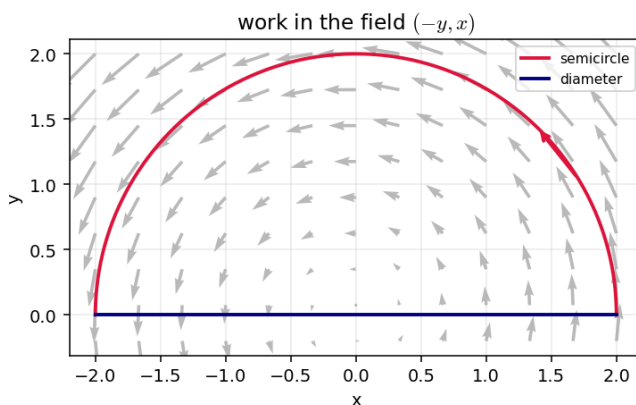
$$\vec{F}(x, y) = (-y, x).$$

השוו את העבודה של השדה מן הנקודה $(R, 0)$ אל הנקודה $(-R, 0)$ לאורך שני מסלולים: חצי המעגל העליון C_1 , והקטע הישר C_2 על ציר x .

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו שדה מהירות סיבובי. לאורך חצי המעגל העליון התנועה הולכת עם הסיבוב של השדה, ולכן צפויה עבודה חיובית. לאורך הקוטר האופקי השדה ניצב לתנועה, ולכן העבודה צפויה להתאפס.



אותו שדה ואותן נקודות קצה, אך המסלול משנה את העבודה.

נפרמטר את חצי המעגל העליון:

$$\vec{r}_1(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

אז

$$\vec{r}_1'(t) = (-R \sin t, R \cos t),$$

ו

$$\vec{F}(\vec{r}_1(t)) = (-R \sin t, R \cos t).$$

לכן

$$\vec{F}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1'(t) = R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t = R^2.$$

מכאן

$$W_{C_1} = \int_0^\pi R^2 dt = \pi R^2.$$

לקטע הישר נבחר

$$\vec{r}_2(t) = (R - 2Rt, 0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

אז

$$\vec{r}_2'(t) = (-2R, 0), \quad \vec{F}(\vec{r}_2(t)) = (0, R - 2Rt).$$

ולכן

$$\vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \vec{r}_2'(t) = 0.$$

מכאן

$$W_{C_2} = 0.$$

קיבלנו

$$W_{C_1} = \pi R^2, \quad W_{C_2} = 0.$$

לכן העבודה תלויה במסלול, והשדה אינו משמר בתחום המישור כולו.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.5.

רובוט נע מן הנקודה $A = (0, 0)$ אל $B = (1, 1)$. שדה העלות המקומי הוא

$$\vec{C}(x, y) = (y, 0),$$

והעלות של מסלול היא

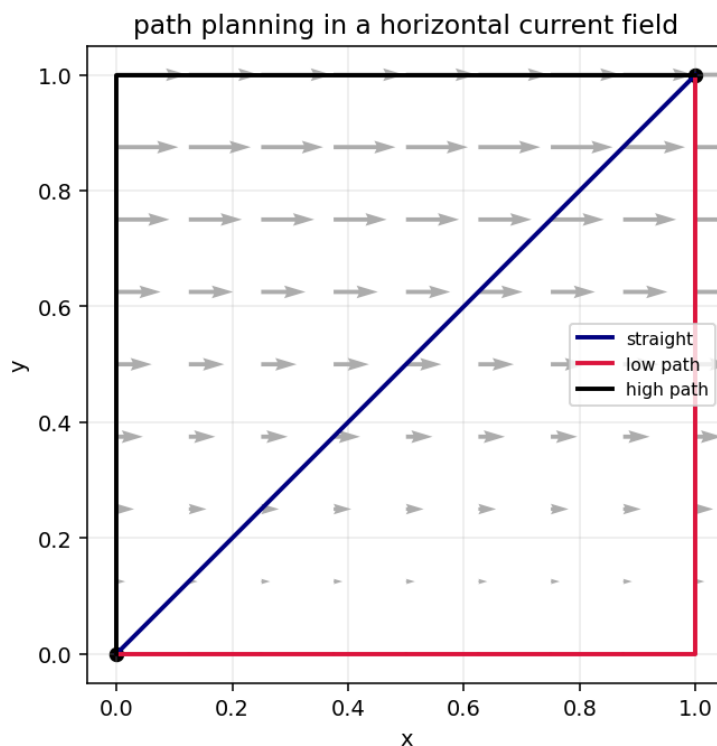
$$\int_C \vec{C} \cdot d\vec{r}.$$

חשבו והשוו את העלות בשלושה מסלולים: הקטע הישר, מסלול שעובר תחילה לאורך ציר x ואז עולה, ומסלול שעולה תחילה לאורך ציר y ואז מתקדם ימינה.

פתרון.

עיקרון מנחה

האינטגרל מסוג שני מודד את רכיב השדה בכיוון התנועה. כאן השדה דוחף בכיוון x בעוצמה שתלויה בגובה y . לכן תנועה ימינה בגובה נמוך זולה יותר מתנועה ימינה בגובה גבוה.



תכנון מסלול בשדה עלות: העלות תלויה לא רק בנקודות הקצה אלא גם בדרך.

המסלול הישר. ניקח

$$\vec{r}_1(t) = (t, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

אז

$$\vec{r}'_1(t) = (1, 1), \quad \vec{C}(\vec{r}_1(t)) = (t, 0).$$

ולכן

$$\vec{C}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}'_1(t) = t.$$

מכאן

$$J_1 = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}.$$

ימינה ואז למעלה. בקטע הראשון

$$\vec{r}_{2a}(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

ולכן $\vec{C} = (0, 0)$ והתרומה היא 0. בקטע השני

$$\vec{r}_{2b}(t) = (1, t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

ו- $\vec{r}'_{2b}(t) = (0, 1)$. מאחר ש- $\vec{C} = (t, 0)$, נקבל

$$\vec{C} \cdot \vec{r}'_{2b} = 0.$$

לכן

$$J_2 = 0.$$

למעלה ואז ימינה. בקטע הראשון

$$\vec{r}_{3a}(t) = (0, t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

הנגזרת היא $(0, 1)$, ולכן שוב המכפלה הסקלרית היא 0. בקטע השני

$$\vec{r}_{3b}(t) = (t, 1), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

ואז

$$\vec{r}'_{3b}(t) = (1, 0), \quad \vec{C}(\vec{r}_{3b}(t)) = (1, 0).$$

לכן

$$J_3 = \int_0^1 1 \, dt = 1.$$

בסיכום:

$$J_2 = 0, \quad J_1 = \frac{1}{2}, \quad J_3 = 1.$$

המסלול הזול ביותר הוא זה שמתקדם בכיוון x לפני העלייה לגובה שבו השדה חזק יותר. זו דוגמה פשוטה לתלות במסלול.

□

ניצחון

1.3 שדות משמרים ופוטנציאלים

הגדרה פורמלית

שדה משמר. שדה $\vec{F}$ הוא משמר בתחום D אם קיימת פונקציה ϕ כך ש

$$\vec{F} = \nabla \phi.$$

ϕ נקראת פוטנציאל.

טענה 1.3.1

המשפט היסודי לאינטגרלים קוויים. אם $\vec{F} = \nabla \phi$ ו- C עקומה מ- A ל- B , אז

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A).$$

בפרט, על מסלול סגור האינטגרל הוא 0.

הוכחה.

אם $\vec{r}(t)$ מתארת את העקומה, אז לפי כלל השרשרת

$$\frac{d}{dt} \phi(\vec{r}(t)) = \nabla \phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t).$$

אינטגרציה מ- a עד b נותנת את ההפרש $\phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$.

הערה קטנה ומועילה

איך בודקים אם שדה משמר? שדה $\vec{F}$ הוא משמר בתחום D אם $\vec{F} = \nabla \phi$ בתחום. כאשר ההנחות המתאימות מתקיימות, לכך יש פירושים שקולים: אינטגרל קווי מסוג שני תלוי רק בנקודות הקצה, אינטגרל על כל עקומה סגורה הוא אפס, וקיימת פונקציית פוטנציאל. במישור, אם $\vec{F} = (P, Q)$, התחום D פשוט קשיר, ו- $P, Q \in C^1$, אז

$$P_y = Q_x$$

הוא תנאי הכרחי ומספיק לשמרנות. במרחב, אם D פשוט קשיר ו- $\vec{F} \in C^1$, אז

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$$

הוא תנאי הכרחי ומספיק לשמרנות. האלגוריתם המעשי הוא:

1. בודקים את התחום: האם יש חור או נקודה שהוצאה מן התחום.
2. בודקים חלקות של רכיבי השדה בתחום.

3. מחשבים P_y, Q_x במישור, או רוטור במרחב.
 4. אם התחום פשוט קשיר והנגזרות מתאימות, מסיקים שהשדה משמר.
 5. אם התחום אינו פשוט קשיר, בודקים עקומות סגורות או מנסים לבנות פוטנציאל בזהירות.
- האזהרה המרכזית היא ששדה עם רוטור אפס בתחום מנוקב אינו בהכרח משמר. שדה המערבולת סביב הראשית הוא הדוגמה הקלאסית.

הערה קטנה ומועילה

נגזרות של פונקציית פוטנציאל. אם $\vec{F} = (P, Q)$ הוא שדה משמר במישור, אז קיימת ϕ כך ש

$$P = \phi_x, \quad Q = \phi_y.$$

לכן, כאשר P, Q גזירות ברציפות, מתקיים תנאי התאימות

$$P_y = \phi_{xy} = \phi_{yx} = Q_x.$$

התנאי הזה הוא תנאי הכרחי תמיד, והוא נעשה גם מספיק כאשר התחום פשוט קשיר והשדה חלק. בפועל זו דרך לבדוק אם נתונים יכולים להיות נגזרות חלקיות של אותה פונקציה.

הערה קטנה ומועילה

אלגוריתם לבניית פוטנציאל. כדי למצוא ϕ עבור $\vec{F} = (P, Q)$:

1. בודקים תחום וחלקות.
 2. בודקים $P_y = Q_x$, ואם התחום פשוט קשיר מסיקים שהשדה משמר.
 3. מאינטגרלים P לפי x :

$$\phi(x, y) = \int P(x, y) dx + h(y).$$
 4. גוזרים את הביטוי לפי y , משווים ל- Q , ומוצאים את $h(y)$.
 5. בודקים בסוף ש- $\nabla\phi = \vec{F}$.
- במרחב משתמשים באותו רעיון, אבל פונקציית התיקון תלויה בשני המשתנים שלא אינטגרלנו לפיהם.

תרגילים: שדות משמרים, פוטנציאלים ונגזרות חלקיות

תרגיל 1.3.2

בדקו האם השדה

$$\vec{F}(x, y) = (2xy + x, x^2 + 3y^2)$$

משמר ב- $\mathbb{R}^2$. אם כן, מצאו פוטנציאל וחשבו את העבודה לאורך כל מסלול מן $(0, 1)$ ל- $(2, 3)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

במישור כולו, שהוא פשוט קשיר, מספיק לבדוק $P_y = Q_x$. לאחר מכן בונים פוטנציאל על ידי אינטגרציה של P ביחס ל- x .

נסמן

$$P = 2xy + x, \quad Q = x^2 + 3y^2.$$

נגזור:

$$P_y = 2x, \quad Q_x = 2x.$$

המישור פשוט קשיר, ולכן השדה משמר.
נמצא פוטנציאל:

$$\phi_x = 2xy + x.$$

אינטגרציה לפי x :

$$\phi(x, y) = x^2y + \frac{x^2}{2} + h(y).$$

כעת

$$\phi_y = x^2 + h'(y).$$

נדרוש $\phi_y = Q = x^2 + 3y^2$, ולכן

$$h'(y) = 3y^2, \quad h(y) = y^3.$$

אפשר לקחת

$$\phi(x, y) = x^2y + \frac{x^2}{2} + y^3.$$

העבודה:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(2, 3) - \phi(0, 1).$$

$$\phi(2, 3) = 4 \cdot 3 + \frac{4}{2} + 27 = 41, \quad \phi(0, 1) = 1.$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 40.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.3.3.

בדקו האם קיימת פונקציה $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש

$$\phi_x(x, y) = 3x^2y + e^y, \quad \phi_y(x, y) = x^3 + xe^y + 2y.$$

אם כן, מצאו פונקציה כזו.

פתרון.

עיקרון מנחה

זו אינה שאלה של אינטגרל קווי ישירות, אלא שאלה הפוכה: האם שני הביטויים יכולים להיות שני הרכיבים של גרדיאנט אחד. אם כן, הם חייבים לקיים תנאי תאימות של נגזרות מעורבות.

נסמן

$$P(x, y) = 3x^2y + e^y, \quad Q(x, y) = x^3 + xe^y + 2y.$$

אם $P = \phi_x$ ו- $Q = \phi_y$, אז עבור פונקציה חלקה מספיק חייב להתקיים

$$P_y = Q_x.$$

נחשב:

$$P_y = 3x^2 + e^y, \quad Q_x = 3x^2 + e^y.$$

התנאי מתקיים בכל $\mathbb{R}^2$, שהוא תחום פשוט קשיר. לכן קיימת פונקציית פוטנציאל. נבנה אותה. מן המשוואה $\phi_x = P$ נקבל באינטגרציה לפי x :

$$\phi(x, y) = \int (3x^2y + e^y) dx = x^3y + xe^y + h(y).$$

כעת נגזור לפי y :

$$\phi_y(x, y) = x^3 + xe^y + h'(y).$$

נשווה ל-

$$Q(x, y) = x^3 + xe^y + 2y.$$

לכן

$$h'(y) = 2y, \quad h(y) = y^2 + C.$$

אפשר לקחת $C = 0$, ולכן

$$\boxed{\phi(x, y) = x^3y + xe^y + y^2.}$$

בדיקה:

$$\phi_x = 3x^2y + e^y, \quad \phi_y = x^3 + xe^y + 2y.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.3.4

האם קיימת פונקציה $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש

$$\phi_x(x, y) = y^2 + \sin x, \quad \phi_y(x, y) = 2xy + e^y + x?$$

נמקו היטב.

פתרון.

עיקרון מנחה

כאשר מבקשים פונקציה שאלה הן נגזרותיה, אין להתחיל באינטגרציה עיוורת. קודם בודקים תנאי הכרחי: נגזרות מעורבות של פונקציה חלקה חייבות להתלכד.

אם פונקציה ϕ כזו קיימת והיא בעלת נגזרות רציפות מסדר שני, אז

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi_x = \frac{\partial}{\partial x} \phi_y.$$

נחשב את שני הצדדים מן הנתונים:

$$\frac{\partial}{\partial y} (y^2 + \sin x) = 2y,$$

ואילו

$$\frac{\partial}{\partial x} (2xy + e^y + x) = 2y + 1.$$

קיבלנו

$$2y \neq 2y + 1.$$

לכן תנאי התאימות נכשל בכל נקודה, ומכאן שלא קיימת פונקציה חלקה ϕ עם הנגזרות החלקיות המבוקשות.

לא קיימת פונקציה כזו.

□

ניצחון

תרגיל 1.3.5

במערכת מדידה התקבל שדה דו ממדי התלוי בשני פרמטרים:

$$\vec{F}_{\alpha, \beta}(x, y) = (2xy + \alpha y^2, x^2 + \beta xy + 3y^2).$$

מצאו עבור אילו ערכי α, β השדה יכול להיות שדה משמר על $\mathbb{R}^2$. עבור ערכים אלה מצאו פוטנציאל וחשבו את העבודה מכל מסלול מן $(0, 0)$ אל $(1, 1)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

זו גרסה אלגוריתמית של בדיקת שדה משמר: הפרמטרים צריכים לעבור בדיקת עקביות. במקום לבדוק מסלולים רבים, משתמשים בתנאי המקומי $P_y = Q_x$ ובפשטות הקשירות של המישור.

נסמן

$$P(x, y) = 2xy + \alpha y^2, \quad Q(x, y) = x^2 + \beta xy + 3y^2.$$

נחשב:

$$P_y = 2x + 2\alpha y, \quad Q_x = 2x + \beta y.$$

כדי שהשדה יהיה משמר על $\mathbb{R}^2$, שהוא פשוט קשיר, צריך ומספיק ש-

$$P_y = Q_x$$

לכל (x, y) . לכן

$$2x + 2\alpha y = 2x + \beta y$$

לכל y , ומכאן

$$\boxed{\beta = 2\alpha.}$$

כעת נניח $\beta = 2\alpha$ ונבנה פוטנציאל. מן $\phi_x = P$:

$$\phi(x, y) = \int (2xy + \alpha y^2) dx = x^2 y + \alpha xy^2 + h(y).$$

נגזור לפי y :

$$\phi_y = x^2 + 2\alpha xy + h'(y).$$

נשווה ל-

$$Q = x^2 + 2\alpha xy + 3y^2.$$

לכן

$$h'(y) = 3y^2, \quad h(y) = y^3 + C.$$

אפשר לקחת

$$\phi(x, y) = x^2 y + \alpha xy^2 + y^3.$$

העבודה מכל מסלול מן $(0, 0)$ אל $(1, 1)$ היא

$$\phi(1, 1) - \phi(0, 0) = (1 + \alpha + 1) - 0 = 2 + \alpha.$$

לכן

$$\boxed{W = 2 + \alpha.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.3.6.

נתון השדה

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xy + z, x^2 + 3y^2, x + e^z).$$

הראו שהוא משמר ב- $\mathbb{R}^3$, מצאו פוטנציאל, וחשבו את העבודה לאורך כל מסלול מן

$$A = (0, 0, 0)$$

אל

$$B = (1, 2, \ln 3).$$

פתרון.

עיקרון מנחה

במרחב אפשר לבדוק שדה משמר בעזרת הרוטור, אבל לעיתים בניית פוטנציאל ישירה מהירה יותר. אם הפוטנציאל נמצא, אין צורך לדעת מהו המסלול בפועל.

נחפש ϕ כך ש

$$\nabla \phi = (2xy + z, x^2 + 3y^2, x + e^z).$$

מן הרכיב הראשון:

$$\phi_x = 2xy + z.$$

אינטגרציה לפי x נותנת

$$\phi(x, y, z) = x^2y + xz + h(y, z).$$

נגזור לפי y :

$$\phi_y = x^2 + h_y(y, z).$$

נשווה לרכיב השני:

$$\phi_y = x^2 + 3y^2.$$

לכן

$$h_y(y, z) = 3y^2, \quad h(y, z) = y^3 + k(z).$$

כעת

$$\phi(x, y, z) = x^2y + xz + y^3 + k(z).$$

נגזור לפי z :

$$\phi_z = x + k'(z).$$

נשווה לרכיב השלישי:

$$x + k'(z) = x + e^z.$$

לכן

$$k'(z) = e^z, \quad k(z) = e^z + C.$$

אפשר לקחת

$$\phi(x, y, z) = x^2y + xz + y^3 + e^z.$$

העבודה מכל מסלול מ- A ל- B היא

$$\phi(B) - \phi(A).$$

נחשב:

$$\phi(1, 2, \ln 3) = 1^2 \cdot 2 + 1 \cdot \ln 3 + 2^3 + e^{\ln 3} = 2 + \ln 3 + 8 + 3 = 13 + \ln 3,$$

ואילו

$$\phi(0, 0, 0) = e^0 = 1.$$

לכן

$$W = 12 + \ln 3.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.3.7.

סווגו את שלושת השדות הבאים והצדיקו:

$$\vec{F}_1(x, y) = (2xy, x^2 + 2y),$$

$$\vec{F}_2(x, y) = (-y, x),$$

$$\vec{F}_3(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

על התחום שבו כל שדה מוגדר.

פתרון.

עיקרון מנחה

לא מספיק לחשב נגזרות מעורבות. קודם בודקים את התחום ואת החלקות, ורק אז משתמשים בקריטריון. השדה השלישי מדגים בדיוק את האזהרה: רוטור מקומי אפס אינו מבטיח פוטנציאל גלובלי בתחום עם חור.

השדה הראשון. כאן

$$P = 2xy, \quad Q = x^2 + 2y.$$

לכן

$$P_y = 2x, \quad Q_x = 2x.$$

התחום הוא כל $\mathbb{R}^2$, שהוא פשוט קשיר, והרכיבים פולינומיים ולכן C^1 . מכאן $\vec{F}_1$ משמר. נבנה

פוטנציאל:

$$\phi_x = 2xy \implies \phi = x^2y + C(y).$$

נגזור לפי y :

$$\phi_y = x^2 + C'(y).$$

נשווה ל- $Q = x^2 + 2y$, ונקבל

$$C'(y) = 2y, \quad C(y) = y^2.$$

לכן

$$\boxed{\phi(x, y) = x^2y + y^2}$$

הוא פוטנציאל.

השדה השני. כאן

$$P = -y, \quad Q = x.$$

לכן

$$P_y = -1, \quad Q_x = 1.$$

מאחר ש- $P_y \neq Q_x$, השדה אינו משמר.

השדה השלישי. השדה מוגדר על

$$D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

בתחום זה הוא C^1 , וחישוב ישיר נותן $P_y = Q_x$ בכל נקודה שבה השדה מוגדר. אבל D אינו פשוט קשיר. נבדוק את מעגל היחידה:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

אז

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \vec{F}_3(\vec{r}(t)) = (-\sin t, \cos t).$$

לכן

$$\vec{F}_3(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 1,$$

ומכאן

$$\oint_C \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0.$$

לכן

$$\boxed{\vec{F}_3 \text{ אינו משמר על } \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}}.$$

□

ניצחון

1.4 משפט גרין, סירקולציה ותחומים עם חור

טענה 1.4.1.

משפט גרין. תהיינה $P, Q \in C^1$ בתחום פתוח המכיל את D ואת שפתו, ויהי $C = \partial D$ בכיוון חיובי. אז

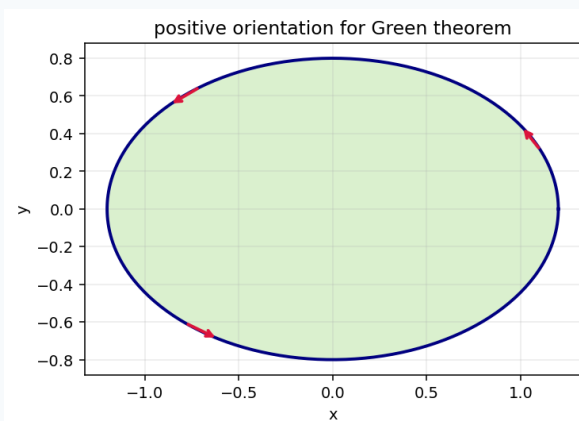
$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA.$$

הוכחה.

זהו משפט גרין מן ההרצאה. הוא מתרגם מחזור על השפה לסכום רציף של הסיבוב המקומי בתוך התחום.

הערה קטנה ומועילה

כיוון חיובי במשפט גרין. כיוון חיובי פירושו שכאשר הולכים על השפה, התחום נמצא מצד שמאל. עבור שפה חיצונית של תחום פשוט זה בדרך כלל נגד כיוון השעון. אם יש חור, השפה החיצונית נלקחת נגד כיוון השעון והשפה הפנימית עם כיוון השעון, כדי שהתחום יישאר משמאל בכל רכיב שפה.



אוריינטציה חיובית: הולכים על השפה כך שהתחום נמצא משמאל.

הערה קטנה ומועילה

צורת שטף מישורית. אם $\vec{F} = (P, Q)$ ושפת D מכוונת חיובית, אז הנורמל החיצוני מתקבל מסיבוב המשיק ימינה. צורת השטף של גרין היא

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D (P_x + Q_y) dA.$$

צורת הסירקולציה משתמשת ב- $Q_x - P_y$, וצורת השטף משתמשת בדיברגנץ המישורי $P_x + Q_y$. שתיהן

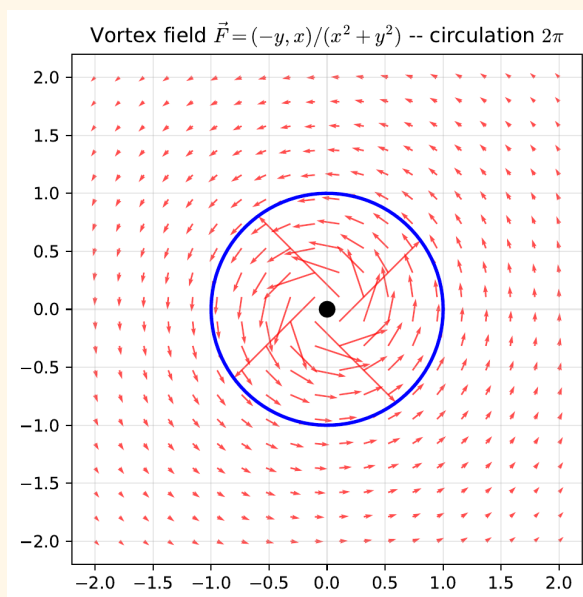
מתארות מעבר ממידע על השפה למידע בתוך התחום.

תזכורת (מההרצאה)

תחומים עם חור ושדות סינגולריים. אם $P_y = Q_x$ בתחום פשוט קשיר, אז השדה משמר. אבל בתחום שאינו פשוט קשיר, תנאי זה אינו מספיק. הדוגמה החשובה היא

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

על $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. הרוטור המישורי מתאפס בכל נקודה שבה השדה מוגדר, אך האינטגרל סביב מעגל היחידה הוא 2π .



שדה מערבולת סביב סינגולריות בראשית. מקומית אין רוטור, אך גלובלית יש מחזור לא אפסי.

תרגילים: משפט גרין, סירקולציה ותחומים עם חור

תרגיל 1.4.2.

חשבו בעזרת משפט גרין:

$$\oint_C (x^2 - y) dx + (x + y^2) dy,$$

כאשר C הוא מעגל היחידה בכיוון חיובי.

פתרון.

עיקרון מנחה

משפט גרין מחליף את האינטגרל הקווי באינטגרל כפול על הדיסק. כאן ההפרש $Q_x - P_y$ קבוע.

$$P = x^2 - y, \quad Q = x + y^2.$$

$$Q_x = 1, \quad P_y = -1.$$

לכן

$$Q_x - P_y = 2.$$

לפי גרין,

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D 2 dA = 2 \text{Area}(D) = 2\pi.$$

$$\boxed{2\pi}.$$

□

ניצחון

חישוב שטח מתוך אינטגרל קווי.

תרגיל 1.4.3.

יהי C האליפסה

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

כאשר $a, b > 0$, בכיוון חיובי. השתמשו במשפט גרין כדי לחשב את השטח הכלוא בתוך האליפסה באמצעות אינטגרל קווי.

פתרון.

עיקרון מנחה

משפט גרין מאפשר לבחור שדה שעבורו הרוטור המישורי הוא 1. אז אינטגרל קווי על השפה מחזיר את השטח. זו דרך יפה לראות ששטח הוא גם גודל שניתן למדוד מן השפה בלבד.

נבחר

$$P(x, y) = -\frac{y}{2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{2}.$$

אז

$$Q_x - P_y = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

לפי משפט גרין,

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1 \, dA = \oint_C P \, dx + Q \, dy = \oint_C \left(-\frac{y}{2} \, dx + \frac{x}{2} \, dy\right).$$

נפרמטר את האליפסה:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

ולכן

$$dx = -a \sin t \, dt, \quad dy = b \cos t \, dt.$$

נציב:

$$-\frac{y}{2} \, dx + \frac{x}{2} \, dy = -\frac{b \sin t}{2}(-a \sin t \, dt) + \frac{a \cos t}{2}(b \cos t \, dt).$$

כלומר

$$-\frac{y}{2} \, dx + \frac{x}{2} \, dy = \frac{ab}{2}(\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = \frac{ab}{2} \, dt.$$

לכן

$$\text{Area}(D) = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2} \, dt = \pi ab.$$

$\text{Area}(D) = \pi ab.$

□

ניצחון

תרגיל 1.4.4.

יהי

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

(א) הראו ש- $Q_x - P_y = 0$ בכל נקודה שבה השדה מוגדר.(ב) חשבו את $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, כאשר C הוא מעגל היחידה נגד כיוון השעון.(ג) הסבירו מדוע השדה אינו משמר על $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

פתרון.

עיקרון מנחה

זו הדוגמה הקלאסית לכך שרוטור מקומי אפס אינו מספיק לשמרניות בתחום עם חור. הסיגולריות בראשית אינה חלק מהתחום, אך היא משפיעה על מסלולים שסוגרים אותה.

נסמן

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

(א)

$$Q_x = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$P_y = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

לכן

$$Q_x - P_y = 0.$$

(ב) נפרמטר את מעגל היחידה:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

אז

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

על המעגל $x^2 + y^2 = 1$, ולכן

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-\sin t, \cos t).$$

מכאן

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

לכן

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi.$$

(ג) אם השדה היה משמר על כל $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, כל אינטגרל לאורך מסלול סגור היה אפס. אבל קיבלנו 2π . לכן

$$\vec{F} \text{ אינו משמר בתחום } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

הסיבה היא שהתחום אינו פשוט קשיר: מעגל המקיף את הראשית אינו ניתן לכיווץ לנקודה בלי לעבור דרך הסינגולריות.

□

ניצחון

תרגיל 1.4.5.

יהי

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

הראו שעל חצי המישור

$$D_+ = \{(x, y) : x > 0\}$$

השדה הוא משמר, ומצאו פוטנציאל. הסבירו מדוע זה אינו סותר את העובדה שהשדה אינו משמר על $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

פתרון.

עיקרון מנחה

אותו שדה יכול להיות משמר על תחום קטן יותר, אך לא על תחום גדול עם חור. הפוטנציאל המקומי הוא הזווית, אבל אי אפשר לבחור זווית רציפה יחידה סביב כל הראשית.

על התחום D_+ אפשר להגדיר

$$\phi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

מפני ש- $x > 0$. נגזור:

$$\phi_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

וכן

$$\phi_y = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

לכן

$$\nabla \phi = \vec{F}$$

על D_+ , ומכאן שהשדה משמר שם.

אין סתירה עם התחום המנוקב כולו. בחצי המישור D_+ אין אפשרות להקיף את הראשית במסלול סגור הנשאר כולו בתחום, ואפשר לבחור ענף רציף של הזווית. לעומת זאת, ב-

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

אפשר להקיף את הראשית, והאינטגרל סביב מעגל היחידה הוא 2π , ולכן אין פוטנציאל גלובלי על כל התחום המנוקב.

□

ניצחון

תרגיל 1.4.6.

שדה מהירויות של נוזל במישור נתון על ידי

$$\vec{V}(x, y) = (-y, x).$$

חשבו את הסירקולציה סביב מעגל ברדיוס R סביב הראשית, והסבירו את הקשר למשפט גרין.

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו שדה סיבובי חלק ללא סינגולריות. כאן משפט גרין תקף ישירות על הדיסק, והסירקולציה שווה לאינטגרל של רוטור מישורי קבוע.

נכתוב $Q = x, P = -y$ אז

$$Q_x = 1, \quad P_y = -1, \quad Q_x - P_y = 2.$$

אם C הוא מעגל ברדיוס R בכיוון חיובי והדיסק שלו הוא D , משפט גרין נותן

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_D 2 \, dA = 2\pi R^2.$$

$$\boxed{\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = 2\pi R^2.}$$

פיזיקלית, הסירקולציה גדלה כמו שטח הדיסק מפני שהסיבוב המקומי של השדה אחיד.

□

ניצחון

1.5 תרגילים נוספים: אינטגרלים קוויים ומשפט גרין

תרגיל 1.5.1

חשבו את שטח מעטפת החלק של הגליל

$$x^2 + y^2 = 9$$

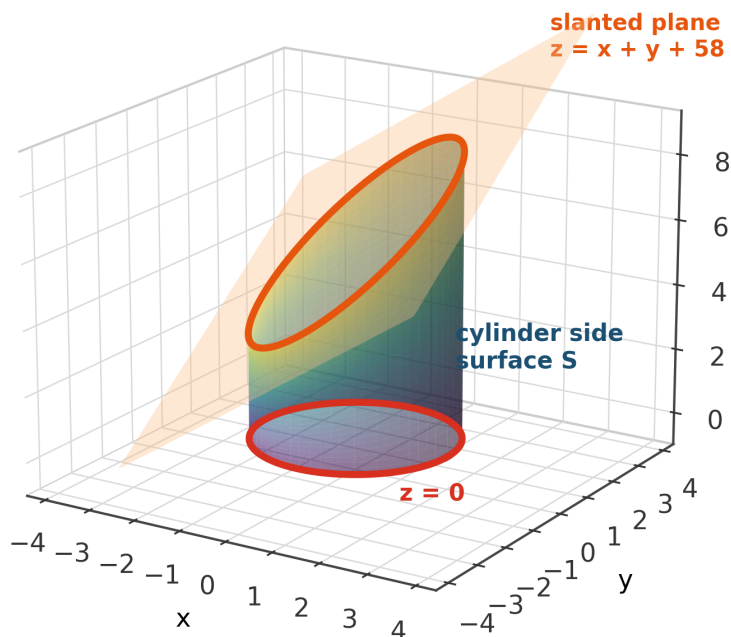
החסום בין מישור xy , כלומר $z = 0$, לבין המישור

$$x + y - z + 58 = 0.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו חישוב מסוג ראשון על עקום: מעטפת גלילית מתקבלת כאשר לוקחים את עקום הבסיס במישור xy , ובכל נקודה עליו מעלים גובה עד המישור העליון. לכן שטח המעטפת הוא אינטגרל קווי $\int_C h \, ds$, כאשר h הוא הגובה.

Cylinder side between $z = 0$ and $z = x + y + 58$ 

(visualized with vertical compression: $58 \rightarrow 6$)

מעטפת גלילית בין $z = 0$ לבין המישור $z = x + y + 58$.

המישור העליון הוא

$$z = x + y + 58.$$

על הגליל $x^2 + y^2 = 9$ נוח לפרמטר את עקום הבסיס:

$$\vec{r}(\theta) = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

מהירות עקום הבסיס היא

$$\|\vec{r}'(\theta)\| = 3, \quad ds = 3 d\theta.$$

הגובה מעל הנקודה (x, y) הוא

$$h(x, y) = x + y + 58.$$

לכן על העקום:

$$h(\theta) = 3 \cos \theta + 3 \sin \theta + 58.$$

שטח המעטפת הוא

$$A = \int_C h ds = \int_0^{2\pi} (3 \cos \theta + 3 \sin \theta + 58) \cdot 3 d\theta.$$

האיברים עם סינוס וקוסינוס מתאפסים על מחזור שלם:

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0.$$

ולכן

$$A = 3 \cdot 58 \cdot 2\pi = 348\pi.$$

$$A = 348\pi.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.5.2.

יהי C המסלול המתקבל מחיתוך האליפסואיד

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$$

עם המישור

$$z = \frac{1}{2}.$$

המסלול מתחיל בנקודה

$$A = (\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2})$$

ומסתיים בנקודה

$$B = (0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}),$$

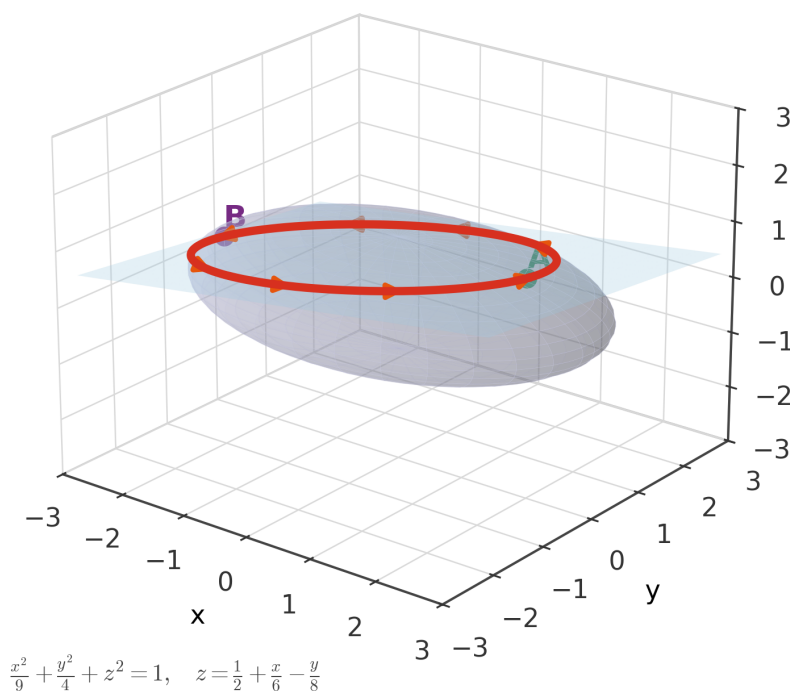
לאורך הקשת הקצרה בכיוון החיובי במישור xy . חשבו

$$\int_C x \, dy - y \, dx + z \, dz.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו אינטגרל קווי מסוג שני. קודם מזהים את העקום, אחר כך מציבים פרמטריזציה בכיוון הנכון, ואז מחשבים dx, dy, dz .

Curve C: ellipsoid-plane intersection

חתך מישורי של אליפסואיד: המסלול הוא קשת אליפטית.

במישור $z = 1/2$ נקבל מן האליפסואיד:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{1}{4} = 1.$$

כלומר

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{3}{4}.$$

נכפול ונכתוב כאליפסה:

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{27/4} = 1.$$

לכן פרמטריזציה מתאימה לקשת היא

$$x = \sqrt{3} \cos t, \quad y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin t, \quad z = \frac{1}{2}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

כאשר $t = 0$ מקבלים את A , וכאשר $t = \pi/2$ מקבלים את B , לכן הכיוון נכון.

נחשב דיפרנציאלים:

$$dx = -\sqrt{3} \sin t \, dt, \quad dy = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos t \, dt, \quad dz = 0.$$

נציב באינטגרנד:

$$x \, dy - y \, dx + z \, dz = (\sqrt{3} \cos t) \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cos t \, dt \right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \sin t \right) (-\sqrt{3} \sin t \, dt).$$

לכן

$$x \, dy - y \, dx + z \, dz = \frac{9}{2} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \frac{9}{2} \, dt.$$

מכאן

$$\int_C x \, dy - y \, dx + z \, dz = \int_0^{\pi/2} \frac{9}{2} \, dt = \frac{9\pi}{4}.$$

$$\boxed{\int_C x \, dy - y \, dx + z \, dz = \frac{9\pi}{4}.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.5.3.

חלקיק נע מן הנקודה $A = (0, 1, 0)$ אל הנקודה $B = (1, 0, 0)$ לאורך המסלול

$$\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, \sin t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

על החלקיק פועל הכוח

$$\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x).$$

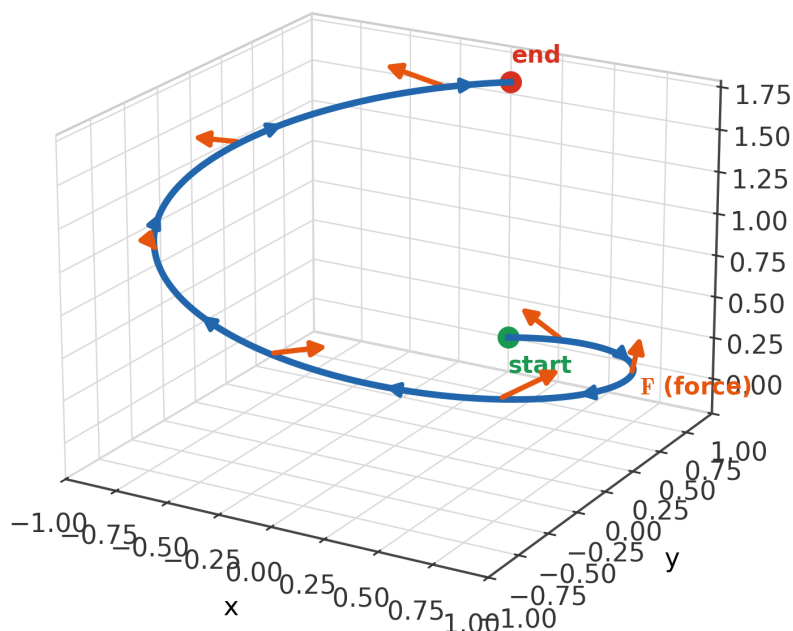
חשבו את העבודה הדרושה לאורך המסלול.

פתרון.

עיקרון מנחה

עבודה של כוח לאורך מסלול היא אינטגרל קווי מסוג שני: מציבים את המסלול בתוך השדה ומכפילים סקלרית במהירות.

Work along a parametrized particle path



$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, t/4), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

מסלול החלקיק על משטח סינוס-קוסינוס, עם כיווני כוח לאורך הדרך.

העבודה היא

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

נגזור את המסלול:

$$\vec{r}'(t) = (\cos t, -\sin t, \cos^2 t - \sin^2 t).$$

על המסלול מתקיים

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\cos t, \sin t \cos t, \sin t).$$

לכן

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t \cos t + \sin t \cos^2 t - \sin^3 t.$$

נחשב כל חלק:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt &= \frac{\pi}{4}, & \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt &= \frac{1}{3}, \\ \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^2 t dt &= \frac{1}{3}, & \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

מכאן

$$W = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

$$W = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.5.4.

יהי $C = \partial D$ המסלול החיובי של התחום

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4, 0 \leq 2xy \leq x^2 - y^2, x > 0\}.$$

חשבו את האינטגרל הקווי

$$\oint_C P dx + Q dy,$$

כאשר

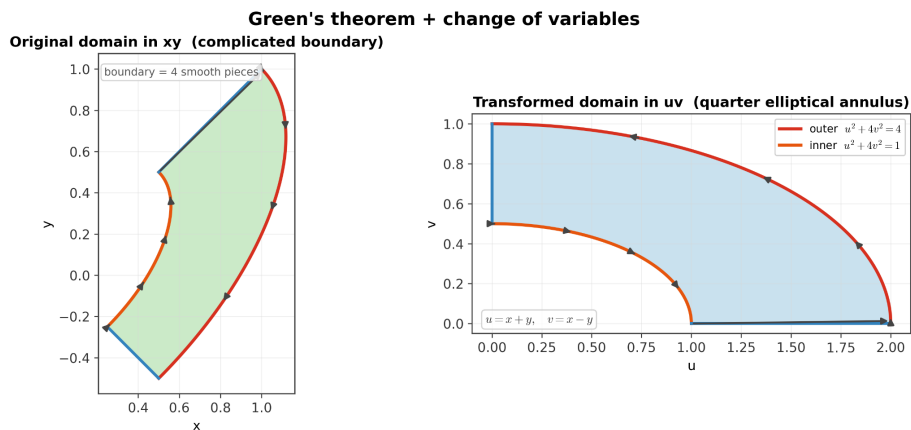
$$P = -y(x^2 + y^2) + \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$Q = x(x^2 + y^2) + \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

השדה נראה מסובך בגלל הלוגריתם והארקטנגנס שמסתתרים בו, אבל החלקים האלה הם גרדיאנט ולכן הרוטור שלהם מתאפס. משפט גרין מחזיר אותנו לאינטגרל כפול, והחלפת המשתנים $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ הופכת את התחום לפשוט.



התחום המסובך במישור xy הופך לתחום פשוט במשתנים u, v .

נסמן

$$R^2 = x^2 + y^2.$$

נשים לב שאפשר לכתוב

$$(P, Q) = (-yR^2, xR^2) + \nabla\phi, \quad \phi = \ln(1 + R^2) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

על התחום שלנו $x > 0$, ולכן הביטוי לארקטנגנס מוגדר היטב. מאחר ש- $\nabla\phi$ הוא גרדיאנט, התרומה שלו לרוטור היא אפס. לכן

$$Q_x - P_y = \frac{\partial}{\partial x}(xR^2) - \frac{\partial}{\partial y}(-yR^2).$$

כעת

$$\frac{\partial}{\partial x}(xR^2) = 3x^2 + y^2, \quad \frac{\partial}{\partial y}(-yR^2) = -(x^2 + 3y^2).$$

ולכן

$$Q_x - P_y = 4(x^2 + y^2) = 4R^2.$$

לפי משפט גרין,

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D 4(x^2 + y^2) dA.$$

נבצע את ההחלפה

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

היעקוביאן הוא

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4(x^2 + y^2) = 4R^2.$$

לכן

$$4R^2 dA = du dv.$$

התחום החדש הוא

$$\tilde{D} = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq u\}.$$

לכן

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\tilde{D}} 1 du dv = \int_1^4 \int_0^u 1 dv du.$$

נקבל

$$\int_1^4 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^4 = \frac{15}{2}.$$

$$\boxed{\oint_C P dx + Q dy = \frac{15}{2}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.5.5.

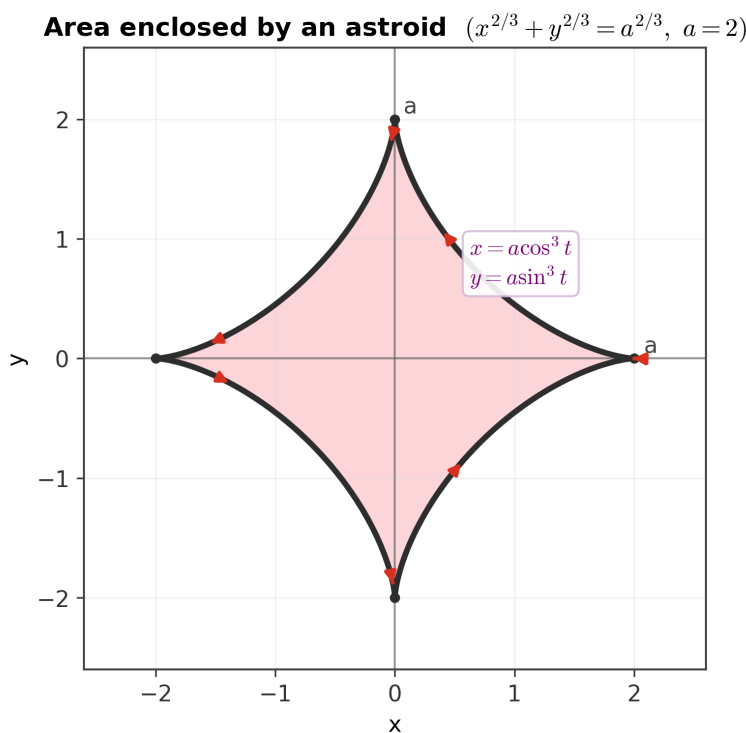
חשבו את השטח הכלוא בתוך האסטרואידה

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

שטח של תחום מישורי אפשר לחשב בעזרת משפט גרין בנוסחה $A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$ לאסטרואידה יש פרמטריזציה טבעית שמבטלת את הצורך לפתור את העקום כגרף.



אסטרואידה: עקום סגור עם ארבעה קודקודים חדים.

נפרמטר את האסטרואידה בכיוון חיובי:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

אז

$$dx = -3a \cos^2 t \sin t \, dt, \quad dy = 3a \sin^2 t \cos t \, dt.$$

לפי גרין,

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx.$$

נחשב את האינטגרנד:

$$x \, dy - y \, dx = 3a^2 \cos^4 t \sin^2 t \, dt + 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t \, dt.$$

נוציא גורם משותף:

$$x \, dy - y \, dx = 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t \, dt.$$

לכן

$$A = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt.$$

מאחר ש-

$$\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4} \sin^2(2t),$$

נקבל

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}.$$

ולכן

$$A = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

□

ניצחון

יצא על ידי חן גדי