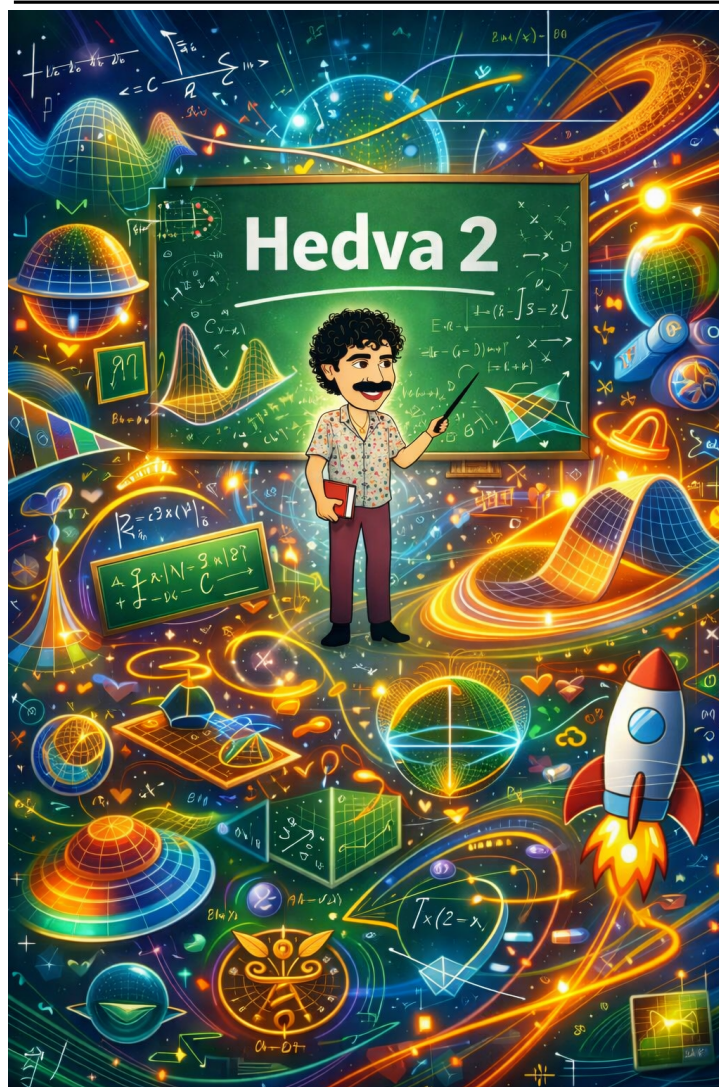


חדו"א 2 להנדסות

סיכומים ותרגולים



נערך ונכתב על ידי חן גדי ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המצויב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

נוצר על ידי חוג גדי

תוכן העניינים

2	1 תרגול 12 ואחרון! : אינטגרלים משטחיים ואנליזה וקטורית
3	1.1 משטחים פרמטריים ואינטגרלים משטחיים
15	1.2 רוטור, דיברגנץ, סטוקס וגאוס
38	1.3 תרגילים נוספים: משטחים, נורמלים, שטח פנים ושטף

תרגול 12 ואחרון! : אינטגרלים משטחיים ואנליזה וקטורית

עיקרון מנחה

התרגול האחרון מחבר את כל רעיונות האנליזה הווקטורית: עקומות, שפות, משטחים, אוריינטציה, עבודה ושטף. משפט סטוקס מחבר סירקולציה על שפה לרוטור על משטח, ומשפט גאוס מחבר שטף דרך משטח סגור לדיברגנץ בתוך הנפח. כך מתקבלת שפה אחת לתיאור זרימה, שדות חשמליים, שדות מגנטיים ושימור מסה או מטען.

1.1 משטחים פרמטריים ואינטגרלים משטחיים

הגדרה פורמלית

משטח פרמטרי. משטח $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ניתן על ידי פרמטריזציה

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

וקטורי המשיק הם

$$\vec{r}_u, \quad \vec{r}_v.$$

אם $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, המשטח רגולרי.

הגדרה פורמלית

נורמל ואלמנט שטח. וקטור נורמלי למשטח הוא

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v.$$

אלמנט השטח הוא

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv.$$

החלפת סדר המכפלה הווקטורית מחליפה את כיוון הנורמל.

הערה קטנה ומועילה

פרמטריזציות סטנדרטיות.

• גרף $z = f(x, y)$: $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-f_x, -f_y, 1), \quad dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA.$$

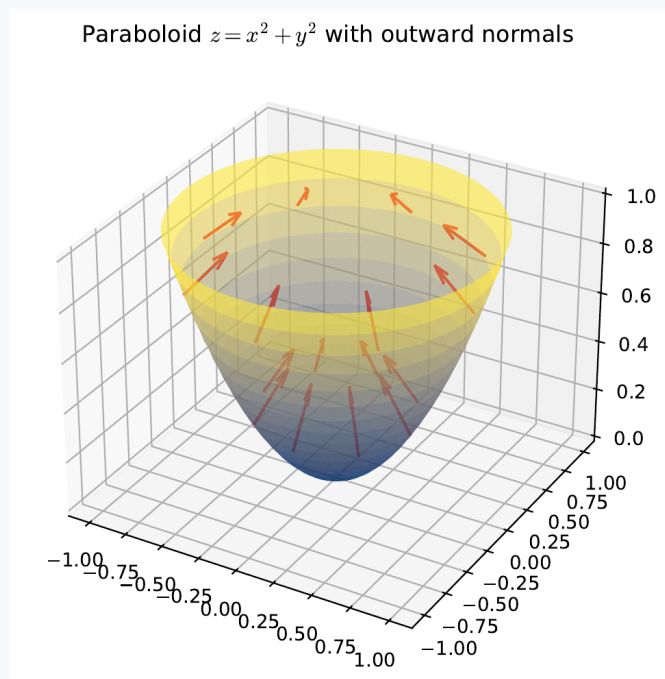
• ספירה ברדיוס R :

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi),$$

$$dS = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

• גליל ברדיוס R :

$$\vec{r}(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z), \quad dS = R d\theta dz.$$



משטח פרמטרי עם נורמלים. המכפלה $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ קובעת גם שטח וגם כיוון.

וקטורים משיקים למשטח ואיך מחשבים שטח פנים

הערה קטנה ומועילה

אם $\vec{r}(u, v)$ מפרמטרת משטח, אז $\vec{r}_u$ ו- $\vec{r}_v$ הם וקטורים משיקים: הראשון מתאר שינוי כאשר u משתנה ו- v קבוע, והשני כאשר v משתנה ו- u קבוע. מלבן קטן $du dv$ במישור הפרמטרים עובר בקירוב למקבילית קטנה במרחב. שטח המקבילית הוא

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv.$$

לכן

$$\text{Area}(S) = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv.$$

אם S הוא גרף $z = f(x, y)$, נבחר

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

אז

$$\vec{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \vec{r}_y = (0, 1, f_y),$$

ולכן

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-f_x, -f_y, 1), \quad dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA.$$

תרגילים: פרמטריזציה, וקטורי משיק ושטח פנים

תרגיל 1.1.1.

חשבו את שטח החלק של המישור

$$z = 2x - y$$

מעל המלבן $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.פתרון.

עיקרון מנחה

זהו גרף, ולכן אין צורך למצוא פרמטריזציה מיוחדת. הנוסחה $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$ נותנת מיד את גורם המתיחה של המישור ביחס להיטל שלו.

כאן

$$f(x, y) = 2x - y, \quad f_x = 2, \quad f_y = -1.$$

לכן

$$dS = \sqrt{1 + 2^2 + (-1)^2} dA = \sqrt{6} dA.$$

השטח הוא

$$\text{Area}(S) = \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{6} dy dx = 2\sqrt{6}.$$

$$\boxed{\text{Area}(S) = 2\sqrt{6}.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.1.2.

חשבו את שטח חלק הפרבולואיד

$$z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו גרף מעל הדיסק $x^2 + y^2 \leq 1$. נוסחת שטח לגרף מובילה לאינטגרל פולרי.

הפרמטריזציה:

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y.$$

לכן

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA.$$

בפולריות:

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta.$$

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2} dr.$$

נציב $du = 8r dr, u = 1 + 4r^2$:

$$\int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{1}{8} \int_1^5 u^{1/2} du = \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1).$$

לכן

$$\text{Area}(S) = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$

□

ניצחון

תרגיל 1.1.3.

חשבו את שטח החלק של החרוט

$$z = \alpha \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha > 0,$$

שנמצא בתוך הספירה

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

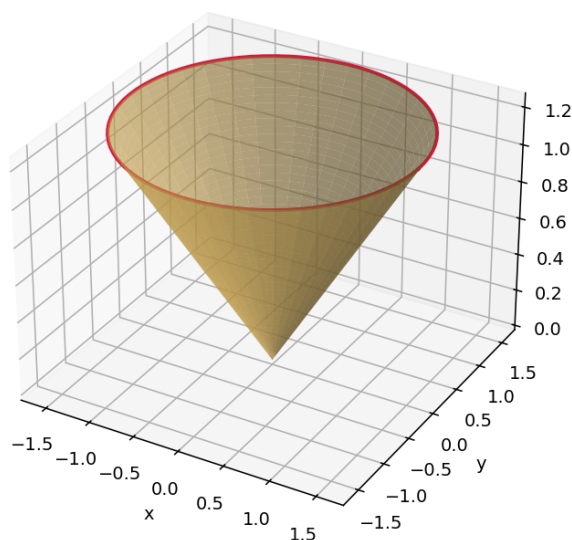
עשו זאת בעזרת פרמטריזציה ישירה של החרוט, ואחר כך בעזרת גאומטריה של חרוט.

פתרון.

עיקרון מנחה

החרוט הוא משטח סיבובי. הפרמטרים הטבעיים הם הרדיוס r והזווית θ . החיתוך עם הספירה קובע עד איזה רדיוס ממשיכים על החרוט.

cone inside a sphere



חלק החרוט שנמצא בתוך הספירה מסתיים במעגל החיתוך.

על החרוט $z = \alpha r$, ולכן על הספירה

$$r^2 + z^2 = r^2 + \alpha^2 r^2 = (1 + \alpha^2) r^2 = R^2.$$

מכאן

$$r_{\max} = \frac{R}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

דרך ראשונה: פרמטריזציה. נבחר

$$\vec{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \alpha r),$$

כאשר

$$0 \leq r \leq \frac{R}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

וקטורי המשיק הם

$$\vec{r}_r = (\cos \theta, \sin \theta, \alpha), \quad \vec{r}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0).$$

המכפלה הווקטורית היא בעלת נורמה

$$\|\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta\| = r\sqrt{1 + \alpha^2}.$$

לכן

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{R/\sqrt{1+\alpha^2}} r \sqrt{1+\alpha^2} dr d\theta.$$

מכאן

$$\text{Area}(S) = 2\pi \sqrt{1+\alpha^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{R^2}{1+\alpha^2} = \frac{\pi R^2}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

דרך שנייה: גאומטריה של חרוט. רדיוס בסיס החלק הוא

$$r_{\max} = \frac{R}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

ואורך הקו היוצר מן הקודקוד עד מעגל החיתוך הוא

$$\ell = \sqrt{r_{\max}^2 + (\alpha r_{\max})^2} = R.$$

שטח מעטפת חרוט הוא

$$\pi r_{\max} \ell.$$

לכן

$$\text{Area}(S) = \pi \frac{R}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot R = \frac{\pi R^2}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

$$\boxed{\text{Area}(S) = \frac{\pi R^2}{\sqrt{1+\alpha^2}}.}$$

□

ניצחון

מה מודד אינטגרל משטחי?

הגדרה פורמלית

אינטגרל משטחי מסוג ראשון. אם f פונקציה סקלרית על S , אז

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv.$$

האינטגרל מסכם צפיפות סקלרית על פני משטח. למשל: מסה של קליפה דקה, מטען כולל על מוליך דק, או כמות חום על ממברנה. הגורם

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv$$

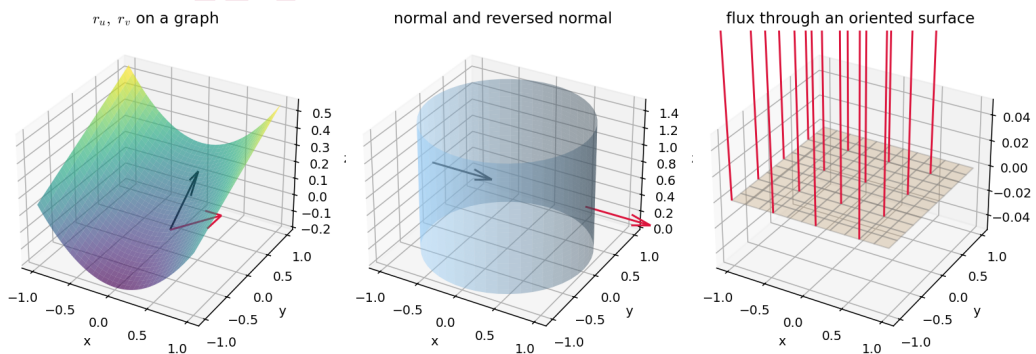
מופיע מפני שהמלבן הקטן במישור הפרמטרים נשלח למקבילית קטנה במרחב, ששטחה הוא נורמת המכפלה הווקטורית. האוריינטציה אינה משנה אינטגרל מסוג ראשון, כי משתמשים בנורמה.

הגדרה פורמלית

אינטגרל משטחי מסוג שני, שטף. אם $\vec{F}$ שדה וקטורי ו- S משטח מכוון, אז

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, du \, dv,$$

כאשר $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ מתאים לאוריינטציה שנבחרה. אינטגרל זה מודד שטף: כמה מן השדה עובר דרך המשטח בכיוון הנורמל. בזרימת נוזלים זהו קצב מעבר דרך ממברנה; בשדה חשמלי זהו שטף חשמלי; ובמודלים של חום או חומר זה מודד מעבר דרך מחסום. אם מחליפים את האוריינטציה, הנורמל מתחלף ל- $-\vec{n}$, ולכן השטף משנה סימן.



וקטורי משיק, כיווני נורמל, ושטף דרך משטח מכוון.

הערה קטנה ומועילה

סוג ראשון מול סוג שני.

שימוש טיפוסי	תלוי באוריינטציה	נוסחה	מה מסכמים	סוג ראשון
מסה, מטען, חום על משטח	לא	$\iint_S f \, dS$	צפיפות סקלרית	סוג ראשון
שטף, מעבר חומר, שטף חשמלי	כן	$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$	רכיב נורמלי של שדה	סוג שני

בחישוב ישיר אפשר לכתוב

$$\vec{n} \, dS = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, du \, dv,$$

אם המכפלה מתאימה לכיוון הנורמל שנבחר. אם היא בכיוון ההפוך, מחליפים סימן.

הערה קטנה ומועילה

ערך מוחלט מול אוריינטציה. באינטגרלים כפולים ומשולשים רגילים משתמשים בערך המוחלט של היעקוביאן, כי שטח ונפח הם גדלים חיוביים:

$$dA = |J_T| \, du \, dv, \quad dV = |J_T| \, du \, dv \, dw.$$

באינטגרל קווי מסוג שני ובאינטגרל משטחי מסוג שני האוריינטציה חשובה, ולכן לא פשוט מוחקים סימנים. עבור שטף משתמשים ב

$$\vec{n} \, dS = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, du \, dv$$

עם האוריינטציה הנכונה. עבור שטח פנים, לעומת זאת,

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv.$$

הערה קטנה ומועילה

טבלת סימונים.

dA	אלמנט שטח במישור
dV	אלמנט נפח במרחב
ds	אלמנט אורך לאורך עקומה
dS	אלמנט שטח על משטח, ללא אוריינטציה
$\vec{n} \, dS$	אלמנט שטח מכיוון לשטף
J_T	T יעקוביאן של ההעתקה הישירה
$J_{T^{-1}}$	יעקוביאן של ההעתקה ההפוכה, כאשר מחשבים אותה

אם מחשבים $J_{T^{-1}}$, אז

$$|J_T| = \frac{1}{|J_{T^{-1}}|},$$

בתנאי שהיעקוביאן ההפוך אינו אפס.

הערה קטנה ומועילה

טעויות נפוצות.

1. לשכוח את הגורם r בקואורדינטות פולריות.
2. להשתמש ב- J_{T-1} במקום ב- $1/J_{T-1}$.
3. לשכוח ערך מוחלט בשינוי שטח או נפח.
4. לשכוח לתאר את התחום החדש.
5. לשכוח להציב את האינטגרנד במשתנים החדשים.
6. לא לבדוק חד חד ערכיות, פרט לשפה או לקבוצות מידה אפס.
7. להשתמש במשפט גאוס על משטח פתוח.
8. להשתמש בסטוקס בלי התאמה בין הנורמל לכיוון השפה.
9. להסיק ששדה משמר רק מפני שהרוטור מתאפס, בלי לבדוק את התחום.

תרגילים: אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון ושני

תרגיל 1.1.4.

חשבו את

$$\iint_S z \, dS$$

כאשר S היא חצי הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

פתרון.

עיקרון מנחה

על ספירה הפרמטריזציה הכדורית היא הטבעית. בחצי העליון $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, והגובה הוא $z = R \cos \varphi$.

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi),$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$dS = R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta, \quad z = R \cos \varphi.$$

כאן

לכן

$$\begin{aligned} \iint_S z \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R \cos \varphi \cdot R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta. \\ &= 2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 2\pi R^3 \cdot \frac{1}{2} = \pi R^3. \end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_S z \, dS = \pi R^3.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.1.5.

יהי S המשטח

$$z = 1 - x - y$$

מעל המשולש

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\},$$

עם אוריינטציה כלפי מעלה. חשבו את השטף של

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

דרך S .**פתרון.**

נכתוב את המשטח כגרף

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \quad (x, y) \in D.$$

כיוון שרוצים נורמל בעל רכיב z חיובי, משתמשים ב

$$\vec{n} dS = (-f_x, -f_y, 1) dA.$$

כאן

$$f(x, y) = 1 - x - y, \quad f_x = -1, \quad f_y = -1.$$

לכן

$$\vec{n} dS = (1, 1, 1) dA.$$

על המשטח

$$\vec{F}(\vec{r}(x, y)) = (x, y, 1 - x - y).$$

ולכן

$$\vec{F}(\vec{r}(x, y)) \cdot (1, 1, 1) = x + y + 1 - x - y = 1.$$

מכאן

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D 1 dA.$$

התחום D הוא משולש ישר זווית עם ניצבים באורך 1, ולכן שטחו $1/2$. לכן

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{2}.}$$

□

ניצחון

1.2 רוטור, דיברגנץ, סטוקס וגאוס

הגדרה פורמלית

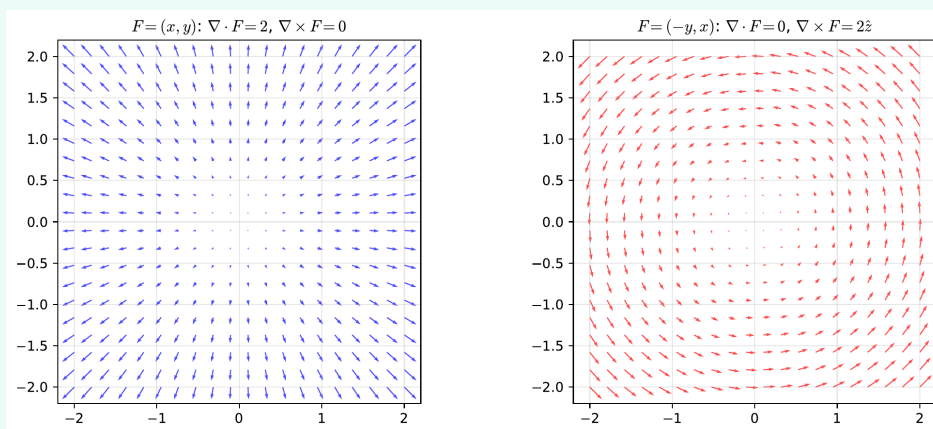
רוטור ודיברגנץ. עבור $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$\nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$$

נקרא דיברגנץ, והוא מודד מקור או שקע מקומי.

$$\nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

נקרא רוטור, והוא מודד סיבוב מקומי.



טענה 1.2.1

משפט סטוקס. אם S משטח מכוון עם שפה ∂S באוריינטציה המתאימה, ו- $\vec{F} \in C^1$, אז

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS.$$

הוכחה.

סטוקס הוא הכללה של משפט גרין. הוא אומר שסירקולציה על שפת משטח שווה לסכום הרוטור על המשטח. אוריינטציית השפה נקבעת לפי כלל יד ימין: אם האגודל מצביע בכיוון הנורמל, האצבעות מראות את כיוון ההליכה החיובי על השפה.

טענה 1.2.2

משפט גאוס, משפט הדיברגנץ. אם V נפח חסום עם שפה סגורה ∂V בעלת אוריינטציה חיצונית,

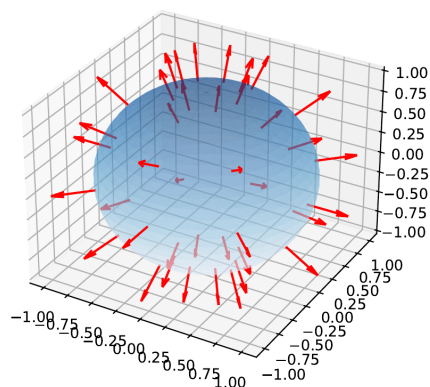
אז $\vec{F} \in C^1$ ו-

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV.$$

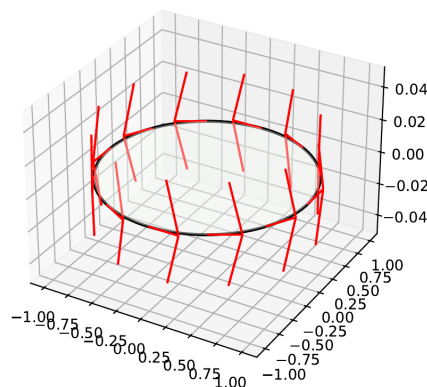
הוכחה.

השטף הכולל דרך מעטפת סגורה, עם נורמל חיצוני, שווה לסכום המקורות המקומיים בתוך הנפח. זהו העיקרון המתמטי מאחורי חוק גאוס באלקטרוסטטיקה ושימור מסה בזרימת נוזלים.

Gauss: $\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$

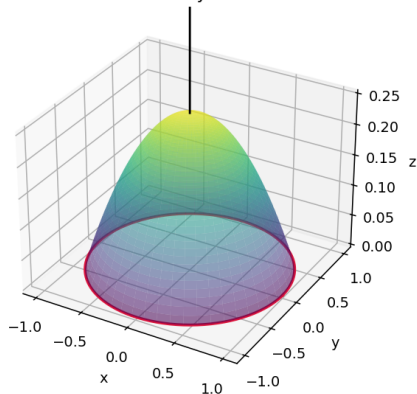


Stokes: $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$

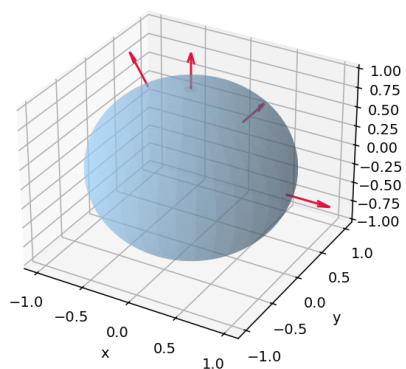


שמאל: גאוס לשטף דרך מעטפת סגורה. ימין: סטוקס לסירקולציה סביב שפה.

Stokes boundary orientation



closed surface with outward normals



אוריינטציית שפה בסטוקס ונורמלים חיצוניים במשטח סגור.

הערה קטנה ומועילה

המשמעות הפיזיקלית והגאומטרית. רוטור מודד סיבוב מקומי או סירקולציה מיקרוסקופית. דיברגנץ מודד מקור או שקע מקומי של שדה. משפט סטוקס אומר שהסירקולציה הכוללת סביב שפת משטח שווה לשטף הכולל של הרוטור דרך המשטח. משפט גאוס אומר שהשטף הכולל דרך מעטפת סגורה שווה לסכום הדיברגנץ בתוך הנפח. בסטוקס חייבת להיות התאמה בין כיוון הנורמל על המשטח לבין כיוון ההליכה על השפה לפי כלל יד ימין. בגאוס המשטח חייב להיות סגור והנורמל חייב להיות חיצוני.

תזכורת (מההרצאה)

אזהרות שימוש.

- במשפט סטוקס חייבת להיות התאמה בין אוריינטציית המשטח לבין אוריינטציית השפה. החלפת הנורמל מחליפה גם את כיוון השפה.
- במשפט גאוס המשטח חייב להיות סגור והנורמל הוא חיצוני. אם משטח פתוח, צריך לסגור אותו או לחשב ישירות.
- שני המשפטים דורשים שהשדה יהיה מספיק חלק בתחום הרלוונטי. סינגולריות בתוך הנפח או על המשטח מחייבות טיפול נפרד, ולעיתים אי אפשר להפעיל את המשפט ישירות.

תרגילים: שטף ומשפט גאוס

תרגיל 1.2.3.

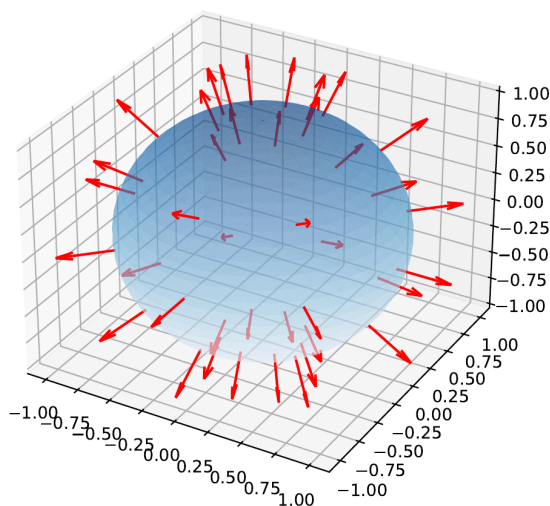
חשבו את השטף של השדה

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

דרך הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, עם נורמל חיצוני, בשתי דרכים: ישירות ובאמצעות משפט גאוס.פתרון.

עיקרון מנחה

על ספירה, הנורמל החיצוני הוא $\vec{n} = (x, y, z)/R$. השדה (x, y, z) מקביל לנורמל, ולכן החישוב הישיר קצר. משפט גאוס נותן בדיקה נוספת דרך הדיברגנץ הקבוע.

Sphere flux: $\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ 

חישוב ישיר. על הספירה,

$$\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{R}, \quad \vec{F} = (x, y, z).$$

לכן

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} = R.$$

מכאן

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S R dS = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3.$$

באמצעות גאוס.

$$\nabla \cdot \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

לכן

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_B 3 dV = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3.$$

$$\boxed{\text{השטף} = 4\pi R^3.}$$

□

ניצחון

1.2.4. תרגיל

חשבו את השטף של

$$\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$$

דרך מעטפת הגליל הסגורה

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \quad 0 \leq z \leq h,$$

עם אוריינטציה חיצונית.

פתרון.

עיקרון מנחה

אפשר לחשב ישירות על שלושת חלקי השפה: צד, מכסה ותחתית. משפט גאוס מאשר את התוצאה מיד, כי הדיברגנץ הוא 1.

חישוב ישיר. על מעטפת הצד הנורמל אופקי, ולכן

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = 0.$$

על התחתית $z = 0$, השדה הוא $\vec{0}$, ולכן השטף אפס. על המכסה $z = h$, הנורמל הוא $(0, 0, 1)$, ולכן

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = h.$$

שטח המכסה הוא πR^2 , ולכן

$$\Phi = h\pi R^2.$$

באמצעות גאוס.

$$\nabla \cdot \vec{F} = 1.$$

נפח הגליל הוא $\pi R^2 h$, ולכן

$$\Phi = \iiint_V 1 dV = \pi R^2 h.$$

$$\boxed{\Phi = \pi R^2 h.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.5.

יהי

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 0).$$

חשבו את השטף של $\vec{F}$ דרך השפה הסגורה של הגליל

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\},$$

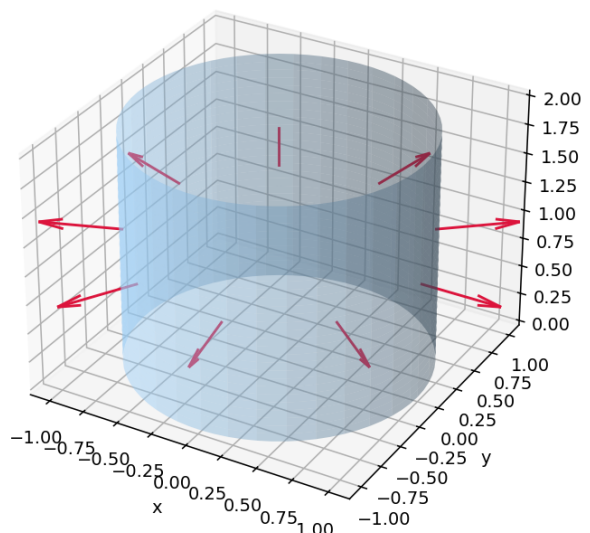
עם נורמל חיצוני. חשבו גם ישירות דרך מעטפת הגליל והבסיסים כדי לבדוק את התוצאה.

פתרון.

עיקרון מנחה

השדה מצביע רדיאלית החוצה מן ציר z , ולכן צפוי שטף דרך המעטפת הצדדית, אך לא דרך המכסים העליון והתחתון. משפט גאוס מתאים כאן במיוחד, כי המשטח סגור והשדה חלק בכל הנפח.

flux through a closed cylinder



שטף דרך גליל סגור: השדה רדיאלי, והנורמל החיצוני על המעטפת מצביע החוצה.

לפי משפט גאוס, מאחר ש- $\vec{F}$ חלק בכל הגליל והשפה מכוונת החוצה,

$$\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

הדיברגנץ הוא

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 2.$$

לכן

$$\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 2 \operatorname{Vol}(E) = 2\pi R^2 h.$$

נבדוק זאת בחישוב ישיר. על המכסה העליון הנורמל הוא $(0, 0, 1)$, ועל המכסה התחתון הנורמל הוא $(0, 0, -1)$. בשני המקרים

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = 0,$$

ולכן אין תרומה מהמכסים.
נפרמטר את המעטפת הצדדית:

$$\vec{r}(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h.$$

אז

$$\vec{r}_\theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0), \quad \vec{r}_z = (0, 0, 1).$$

המכפלה הווקטורית בסדר המתאים לנורמל חיצוני היא

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0).$$

על המעטפת

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta, z)) = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0).$$

לכן

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta, z)) \cdot (\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z) = R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta = R^2.$$

ומכאן

$$\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^h \int_0^{2\pi} R^2 d\theta dz = 2\pi R^2 h.$$

$$\boxed{\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 2\pi R^2 h.}$$

החישוב הישיר מאשר את משפט גאוס ומדגיש את תפקיד האוריינטציה החיצונית.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.6.

יהי

$$\vec{E}(x, y, z) = k \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad k > 0.$$

חשבו את השטף דרך ספירה ברדיוס R סביב הראשית, והסבירו מדוע אין להשתמש במשפט גאוס ישירות על הכדור המכיל את הראשית.

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו שדה רדיאלי מסוג חוק ריבוע הפוך. על כל ספירה סביב הראשית הוא מקביל לנומל וגודלו k/R^2 . הדיברגנץ מתאפס מחוץ לראשית, אבל בראשית יש סינגולריות, ולכן תנאי המשפט הקלאסי אינם מתקיימים על כדור הכולל אותה.

על הספירה:

$$\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{R}, \quad \vec{E} = k \frac{(x, y, z)}{R^3}.$$

לכן

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = k \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^4} = \frac{k}{R^2}.$$

מכאן

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{k}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi k.$$

$$\boxed{\Phi = 4\pi k.}$$

אין להשתמש בגאוס ישירות על הכדור, כי $\vec{E}$ אינו מוגדר בראשית ואינו C^1 בתחום הסגור. פיזיקלית, הראשית מתנהגת כמו מטען נקודתי: הדיברגנץ הרגיל אפס מחוץ לראשית, אך השטף הכולל סביב הראשית אינו אפס.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.7.

חשבו את השטף דרך ספירה $S_R : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, עם נורמל חיצוני, עבור שני השדות

$$\vec{E}_1(x, y, z) = (x, y, z),$$

$$\vec{E}_2(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

הסבירו באיזה מקרה מותר להשתמש בגאוס ישירות על הכדור ובאיזה מקרה לא.

פתרון.

עיקרון מנחה

שני השדות רדיאליים ולכן החישוב הישיר על ספירה קצר. ההבדל החשוב הוא חלקות: $\vec{E}_1$ חלק בכל הכדור, ואילו $\vec{E}_2$ אינו מוגדר בראשית. לכן בגאוס צריך לבדוק את תחום החלקות לפני שמפעילים את המשפט.

השדה החלק. על הספירה מתקיים

$$\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{R}.$$

לכן

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{n} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} = R.$$

ומכאן

$$\iint_{S_R} \vec{E}_1 \cdot \vec{n} dS = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3.$$

אפשר גם להשתמש בגאוס ישירות, כי $\vec{E}_1$ חלק בכל הכדור:

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = 3,$$

ולכן

$$\iiint_{B_R} 3 dV = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3.$$

השדה הסינגולרי. על הספירה

$$\vec{E}_2 = \frac{(x, y, z)}{R^3},$$

ולכן

$$\vec{E}_2 \cdot \vec{n} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^4} = \frac{1}{R^2}.$$

מכאן

$$\iint_{S_R} \vec{E}_2 \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi.$$

אין להשתמש בגאוס ישירות על הכדור המלא, כי $\vec{E}_2$ אינו מוגדר בראשית. אם מסירים כדור קטן סביב הראשית, השדה חלק בקליפה המתקבלת, ואז יש לטפל גם בשטף דרך הספירה הפנימית. זהו בדיוק המצב שמכין לאינטואיציה של מטען נקודתי.

$$\Phi_1 = 4\pi R^3, \quad \Phi_2 = 4\pi.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.8.

יהי $\vec{F} \in C^1$ בתחום שבין שני משטחים סגורים S_1, S_2 . נניח כי

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0$$

בכל התחום שביניהם. הראו שהשטף דרך S_1 שווה לשטף דרך S_2 , אם בשניהם בוחרים את הנורמל הפונה החוצה מן הגוף הפנימי.

פתרון.

נסמן V את הנפח הכלוא בין שני המשטחים. לשפה של V יש שני חלקים: המשטח החיצוני והמעטפת הפנימית. נפעיל את משפט גאוס על V :

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV.$$

לפי הנתון,

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV = 0.$$

לכן

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

אם S_2 הוא המשטח החיצוני, הנורמל של ∂V עליו הוא הנורמל החוצה. אם S_1 הוא המשטח הפנימי, הנורמל של ∂V עליו פונה לתוך הגוף הפנימי, ולכן הוא הפוך לנורמל החוצה מן הגוף הפנימי. לכן מתקבל

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

מכאן

$$\boxed{\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS.}$$

פירוש אפשרי הוא שדה ללא מקורות וללא שקעים: מה שיוצא דרך מעטפת אחת חייב לצאת גם דרך מעטפת אחרת המקיפה את אותו אזור.

□

ניצחון

להעל ידיו חן גדי

תרגילים: משפט סטוקס וסירקולציה

תרגיל 1.2.9.

אמתו את משפט סטוקס עבור

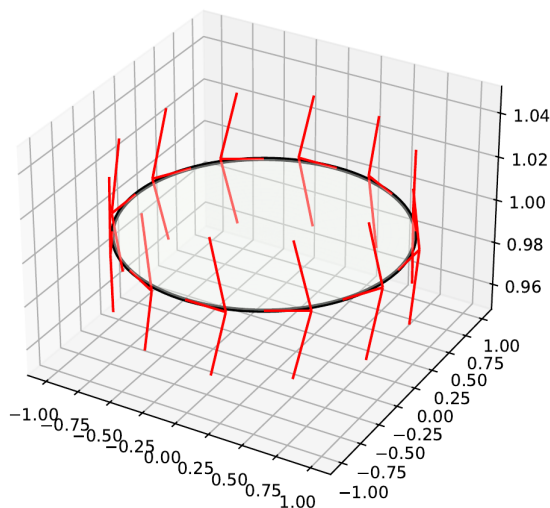
$$\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

והמשטח S שהוא הדיסק $x^2 + y^2 \leq R^2$ במישור $z = 0$, עם נורמל כלפי מעלה.

פתרון.

עיקרון מנחה

השפה היא מעגל בכיוון חיובי ביחס לנורמל כלפי מעלה, כלומר נגד כיוון השעון. הרוטור קבוע, ולכן שני הצדדים פשוטים.

Stokes: disk at $z=1$ with boundary circle

צד השפה. נפרמטר:

$$\vec{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\vec{r}'(t) = (-R \sin t, R \cos t, 0).$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-R \sin t, R \cos t, 0).$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t = R^2.$$

לכן

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2.$$

צד המשטח.

$$\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 2).$$

הנורמל הוא $\vec{n} = (0, 0, 1)$, ולכן

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = 2.$$

$$\iint_S 2 dS = 2\pi R^2.$$

שני הצדדים שווים, כדרוש.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.10.

יהי

$$\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0),$$

ויהי C המעגל

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0,$$

בכיוון נגד כיוון השעון במבט מלמעלה. חשבו את

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

בעזרת משפט סטוקס פעם אחת עם הדיסק S_1 במישור $z = 0$, ופעם אחת עם המשטח

$$S_2: \quad z = a \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right), \quad x^2 + y^2 \leq R^2,$$

עם נורמל בעל רכיב z חיובי.

פתרון.

עיקרון מנחה

משפט סטוקס תלוי בשפה ובאוריינטציה, לא בבחירת המשטח המסוים, כל עוד השדה חלק על אזור מתאים והמשטחים חולקים אותה שפה. זו נקודה חשובה: אפשר לבחור את המשטח שהופך את החישוב לפשוט.

הרוטור.

$$\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 2).$$

הדיסק S_1 . בדיסק במישור $z = 0$ עם נורמל כלפי מעלה,

$$\vec{n} = (0, 0, 1).$$

לכן

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} 2 dS = 2\pi R^2.$$

המשטח S_2 . נכתוב אותו כגרף $z = f(x, y)$, כאשר

$$f(x, y) = a \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right).$$

לנורמל בעל רכיב z חיובי משתמשים ב

$$\vec{n} dS = (-f_x, -f_y, 1) dA.$$

כיוון שהרוטור הוא $(0, 0, 2)$, מתקבל

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = (0, 0, 2) \cdot (-f_x, -f_y, 1) dA = 2 dA.$$

ההיטל של S_2 הוא אותו דיסק $x^2 + y^2 \leq R^2$, ולכן

$$\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} 2 dA = 2\pi R^2.$$

לפי סטוקס, בשני המקרים

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi R^2.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.11

יהי

$$\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0),$$

ויהי C המעגל $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, בכיוון החיובי ביחס לנורמל $(0, 0, 1)$. חשבו את

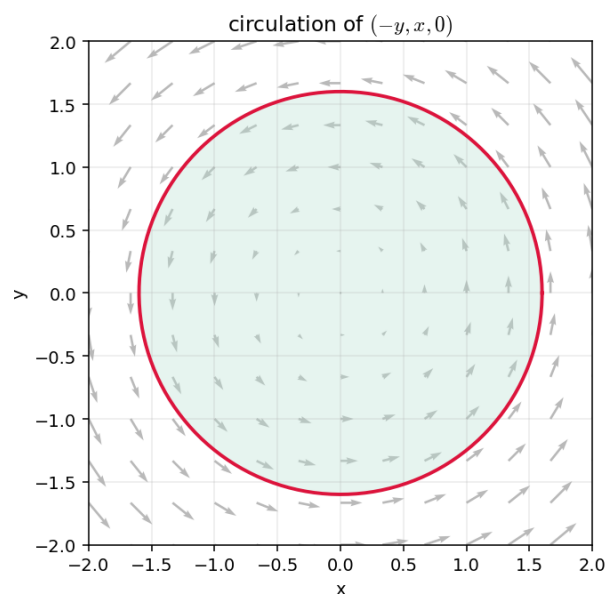
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

בעזרת משפט סטוקס.

פתרון.

עיקרון מנחה

השדה מסתובב סביב ציר z . משפט סטוקס אומר שהסירקולציה סביב המעגל שווה לסכום הרוטור דרך הדיסק שהוא חוסם. לכן אין צורך לפרמטר את השפה, אלא לחשב רוטור קבוע.



שדה סיבובי סביב הציר: הסירקולציה סביב המעגל מתקבלת משטף הרוטור דרך הדיסק.

נכתוב

$$\vec{F} = (-y, x, 0).$$

הרוטור הוא

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

נבחר את הדיסק

$$D = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

עם נורמל $\vec{n} = (0, 0, 1)$ לפי סטוקס,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS.$$

כאן

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = 2.$$

ולכן

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D 2 \, dA = 2\pi R^2.$$

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi R^2.}$$

המשמעות הפיזיקלית היא שסירקולציה סביב לולאה מודדת כמה השדה מסתובב בממוצע בתוך הלולאה.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.12.

יהי S החצי העליון של הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, עם נורמל חיצוני, ושפתו C היא המעגל $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, עבור

$$\vec{F} = (-y, x, z)$$

חשבו את $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ בעזרת סטוקס, ולאחר מכן חשבו את השטף של $\vec{F}$ דרך S .

פתרון.

עיקרון מנחה

אותו משטח משתתף בשני רעיונות שונים. סטוקס משתמש ברוטור כדי לחשב עבודה סביב השפה. שטף משתמש ברכיב הנורמלי של השדה דרך המשטח. חשוב לא לערבב בין שתי הפעולות.

סירקולציה באמצעות סטוקס.

$$\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 2).$$

לכן

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (0, 0, 2) \cdot \vec{n} \, dS.$$

הרכיב z של $\vec{n} \, dS$ על חצי הספירה שווה לאלמנט השטח המוטל על דיסק הבסיס D , ולכן

$$\iint_S (0, 0, 2) \cdot \vec{n} \, dS = 2 \, \text{Area}(D) = 2\pi R^2.$$

לכן

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi R^2.}$$

שטף דרך חצי הספירה. על הספירה $\vec{n} = (x, y, z)/R$ לכן

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{(-y, x, z) \cdot (x, y, z)}{R} = \frac{-xy + xy + z^2}{R} = \frac{z^2}{R}.$$

בפרמטריזציה כדורית של חצי הספירה:

$$z = R \cos \varphi, \quad dS = R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta,$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

לכן

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 \cos^2 \varphi}{R} \cdot R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

נציב $du = -\sin \varphi \, d\varphi, u = \cos \varphi$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \int_0^1 u^2 \, du = \frac{1}{3}.$$

לכן

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{2\pi R^3}{3}.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.13.

תהי

$$\vec{A} = (P, Q, R)$$

שדה C^2 בתחום פתוח. הראו כי

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0.$$

הסיקו שאם S הוא משטח סגור בתחום, אז

$$\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} \, dS = 0.$$

פתרון.

נחשב תחילה את הרוטור:

$$\nabla \times \vec{A} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y).$$

נחשב את הדיברגנץ של הרוטור:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(R_y - Q_z) + \frac{\partial}{\partial y}(P_z - R_x) + \frac{\partial}{\partial z}(Q_x - P_y).$$

כלומר

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz}.$$

מאחר שהרכיבים הם C^2 , אפשר להחליף סדר נגזרות מעורבות:

$$R_{yx} = R_{xy}, \quad Q_{zx} = Q_{xz}, \quad P_{zy} = P_{yz}.$$

לכן כל האיברים מתבטלים בזוגות, ומתקבל

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0.}$$

כעת נשתמש במשפט גאוס עבור השדה $\nabla \times \vec{A}$. אם $S = \partial V$, אז

$$\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = 0.$$

לכן

$$\boxed{\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS = 0.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.14

יהי B קבוע, ויהי

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{B}{2}(-y, x, 0).$$

העקומה C היא האליפסה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

בכיוון נגד כיוון השעון במבט מלמעלה. חשבו

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

פתרון.

נשתמש במשפט סטוקס עם המשטח S שהוא האליפסה המלאה במישור $z = 0$, ועם נורמל

$$\vec{n} = (0, 0, 1).$$

נחשב את הרוטור:

$$\nabla \times \vec{A} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} \frac{Bx}{2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{By}{2} \right) \right) = (0, 0, B).$$

לפי סטוקס,

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS.$$

לכן

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S B dA = B \text{Area}(S).$$

שטח האליפסה הוא

$$\text{Area}(S) = \pi ab.$$

לכן

$$\boxed{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = B\pi ab.}$$

החישוב אומר שהסירקולציה של $\vec{A}$ סביב השפה שווה לשטף השדה הקבוע $(0, 0, B)$ דרך האליפסה.

□

ניצחון

משוואת הרציפות ושימור כמות דרך משפט גאוס.

תרגיל 1.2.15.

תהי $\rho(t, x, y, z)$ צפיפות של חומר, מטען, או נוזל בנקודה (x, y, z) בזמן t , ותהי

$$\vec{J}(t, x, y, z)$$

צפיפות הזרם המתאימה. כלומר, $\vec{J} \cdot \vec{n} dS$ הוא קצב המעבר דרך אלמנט שטח קטן dS בכיוון הנורמל $\vec{n}$.

נניח שלכל נפח קבוע וחלק $V \subseteq \mathbb{R}^3$ מתקיים חוק השימור

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(t, x, y, z) dV = - \iint_{\partial V} \vec{J}(t, x, y, z) \cdot \vec{n} dS,$$

כאשר $\vec{n}$ הוא הנורמל החיצוני ל- ∂V .

1. הראו שמתוך חוק השימור הגלובלי נובעת משוואת הרציפות המקומית

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

2. עבור הקבועים $\lambda > 0, \rho_0 > 0$, נגדיר

$$\rho(t, x, y, z) = \rho_0 e^{-\lambda t}$$

I

$$\vec{J}(t, x, y, z) = \frac{\lambda \rho_0 e^{-\lambda t}}{3} (x, y, z).$$

בדקו ישירות שמשוואת הרציפות מתקיימת.

3. יהי

$$B_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

חשבו את הכמות הכוללת

$$Q_R(t) = \iiint_{B_R} \rho(t, x, y, z) dV.$$

4. חשבו ישירות את השטף החוצה דרך הספירה

$$S_R = \partial B_R$$

כלומר את

$$\Phi_R(t) = \iint_{S_R} \vec{J} \cdot \vec{n} dS.$$

5. ודאו שמתקיים

$$\frac{dQ_R}{dt} = -\Phi_R(t).$$

פתרון.

1. נתחיל מן חוק השימור הגלובלי:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(t, x, y, z) dV = - \iint_{\partial V} \vec{J}(t, x, y, z) \cdot \vec{n} dS.$$

מכיוון שהנפח V קבוע בזמן, מותר להעביר את הנגזרת אל תוך האינטגרל:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(t, x, y, z) dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x, y, z) dV.$$

מצד שני, לפי משפט גאוס,

$$\iint_{\partial V} \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{J} dV.$$

לכן חוק השימור נעשה

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_V \nabla \cdot \vec{J} dV.$$

נעביר אגף:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} \right) dV = 0.$$

השוויון הזה נכון לכל נפח חלק V . לכן הפונקציה שבתוך האינטגרל חייבת להתאפס נקודתית:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

זו משוואת הרציפות.

2. כאן

$$\rho(t, x, y, z) = \rho_0 e^{-\lambda t}.$$

לכן

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\lambda \rho_0 e^{-\lambda t}.$$

כעת

$$\vec{J}(t, x, y, z) = \frac{\lambda \rho_0 e^{-\lambda t}}{3} (x, y, z).$$

נסמן

$$c(t) = \frac{\lambda \rho_0 e^{-\lambda t}}{3}.$$

אז

$$\vec{J}(t, x, y, z) = c(t)(x, y, z).$$

לכן

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial}{\partial x}(c(t)x) + \frac{\partial}{\partial y}(c(t)y) + \frac{\partial}{\partial z}(c(t)z).$$

מכיוון ש- $c(t)$ אינו תלוי ב- x, y, z , נקבל

$$\frac{\partial}{\partial x}(c(t)x) = c(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(c(t)y) = c(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(c(t)z) = c(t).$$

לכן

$$\nabla \cdot \vec{J} = 3c(t) = \lambda \rho_0 e^{-\lambda t}.$$

מכאן

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = -\lambda \rho_0 e^{-\lambda t} + \lambda \rho_0 e^{-\lambda t} = 0.$$

לכן משוואת הרציפות מתקיימת.

3. בתוך הכדור B_R , הצפיפות אינה תלויה במקום אלא רק בזמן. לכן

$$Q_R(t) = \iiint_{B_R} \rho_0 e^{-\lambda t} dV = \rho_0 e^{-\lambda t} \iiint_{B_R} 1 dV.$$

נפח כדור ברדיוס R הוא

$$\text{Vol}(B_R) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

לכן

$$Q_R(t) = \rho_0 e^{-\lambda t} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

כלומר

$$Q_R(t) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 e^{-\lambda t}.$$

4. על הספירה S_R מתקיים

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

הנורמל החיצוני ל- S_R הוא

$$\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{R}.$$

השדה הוא

$$\vec{J} = \frac{\lambda \rho_0 e^{-\lambda t}}{3} (x, y, z).$$

לכן

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = \frac{\lambda \rho_0 e^{-\lambda t}}{3} (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{R}.$$

נחשב את המכפלה הסקלרית:

$$(x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

לכן

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = \frac{\lambda \rho_0 e^{-\lambda t}}{3} \cdot \frac{R^2}{R} = \frac{\lambda \rho_0 e^{-\lambda t}}{3} R.$$

זהו ערך קבוע על הספירה. לכן

$$\Phi_R(t) = \iint_{S_R} \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_R} \frac{\lambda \rho_0 e^{-\lambda t}}{3} R dS.$$

נוציא קבועים:

$$\Phi_R(t) = \frac{\lambda \rho_0 e^{-\lambda t}}{3} R \iint_{S_R} 1 dS.$$

שטח ספירה ברדיוס R הוא

$$\text{Area}(S_R) = 4\pi R^2.$$

לכן

$$\Phi_R(t) = \frac{\lambda \rho_0 e^{-\lambda t}}{3} R \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3} \pi \lambda \rho_0 R^3 e^{-\lambda t}.$$

כלומר

$$\Phi_R(t) = \frac{4}{3} \pi \lambda \rho_0 R^3 e^{-\lambda t}.$$

5. מצאנו

$$Q_R(t) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 e^{-\lambda t}.$$

לכן

$$\frac{dQ_R}{dt} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 \frac{d}{dt} (e^{-\lambda t}).$$

מכיוון ש

$$\frac{d}{dt} e^{-\lambda t} = -\lambda e^{-\lambda t},$$

נקבל

$$\frac{dQ_R}{dt} = -\frac{4}{3} \pi \lambda \rho_0 R^3 e^{-\lambda t}.$$

מצד שני

$$\Phi_R(t) = \frac{4}{3} \pi \lambda \rho_0 R^3 e^{-\lambda t}.$$

לכן

$$\frac{dQ_R}{dt} = -\Phi_R(t).$$

כלומר, קצב הירידה של הכמות בתוך הכדור שווה בדיוק למינוס השטף החוצה דרך השפה. זו בדיוק המשמעות הפיזיקלית של משוואת הרציפות: מה שנעלם מן הנפח יוצא דרך השפה, ואין יצירה או איבוד פנימי של הכמות.

□

ניצחון

1.3 תרגילים נוספים: משטחים, נורמלים, שטח פנים ושטף

1.3.1 תרגיל

עבור כל אחד מן המשטחים הבאים כתבו פרמטריזציה, תחום פרמטרים, וקטור נורמלי מתאים ואלמנט שטח: ספירה, אליפסואיד, גליל וחרוט.

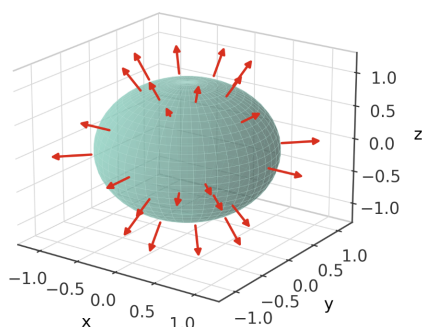
פתרון.

עיקרון מנחה

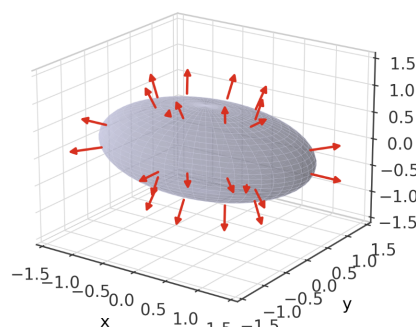
בכל משטח עושים אותו דבר: בוחרים שני פרמטרים שמכסים את המשטח, מחשבים שני וקטורי משיק, ואז המכפלה הווקטורית נותנת גם כיוון נורמל וגם את אלמנט השטח. אם מחשבים שטח, משתמשים בנורמה. אם מחשבים שטף, חשוב לשמור על הכיוון של הנורמל.

Outward normals on standard surfaces

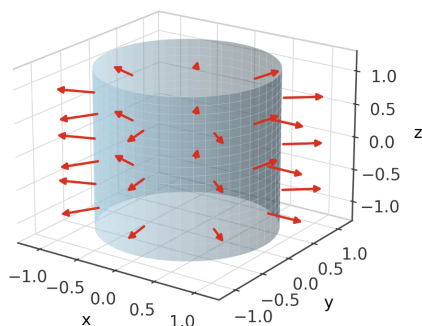
Sphere



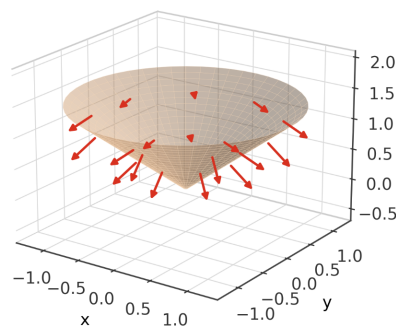
Ellipsoid



Cylinder



Cone



ספירה, אליפסואיד, גליל וחרוט עם כיווני נורמל חיצוניים.

ספירה ברדיוס R .

נכתוב את הספירה בעזרת שתי זוויות:

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi).$$

התחום של הפרמטרים הוא

$$0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

נחשב את וקטורי המשיק:

$$\vec{r}_\varphi = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, -R \sin \varphi),$$

$$\vec{r}_\theta = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \cos \theta, 0).$$

המכפלה הווקטורית היא

$$\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta = (R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, R^2 \sin \varphi \cos \varphi).$$

זהו נורמל חיצוני, כי הוא בכיוון של וקטור המקום (x, y, z) . לכן

$$\|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta\| = R^2 \sin \varphi.$$

כלומר

$$dS = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

אליפסואיד.

נתבונן באליפסואיד

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$

זו ספירה שעברה מתיחה שונה בכל ציר. לכן נבחר

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (a \sin \varphi \cos \theta, b \sin \varphi \sin \theta, c \cos \varphi).$$

התחום הוא

$$0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

וקטורי המשיק הם

$$\vec{r}_\varphi = (a \cos \varphi \cos \theta, b \cos \varphi \sin \theta, -c \sin \varphi),$$

$$\vec{r}_\theta = (-a \sin \varphi \sin \theta, b \sin \varphi \cos \theta, 0).$$

נחשב את המכפלה הווקטורית:

$$\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta = (bc \sin^2 \varphi \cos \theta, ac \sin^2 \varphi \sin \theta, ab \sin \varphi \cos \varphi).$$

לכן אלמנט השטח הוא

$$dS = abc \sin \varphi \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}} d\varphi d\theta.$$

גליל ברדיוס R .

עבור גליל סביב ציר z , פרמטריזציה טבעית היא

$$\vec{r}(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z).$$

אם הגליל נמצא בין הגבהים z_0 ו- z_1 , אז

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad z_0 \leq z \leq z_1.$$

וקטורי המשיק הם

$$\vec{r}_\theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0), \quad \vec{r}_z = (0, 0, 1).$$

נחשב:

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0).$$

זהו נורמל חיצוני, כי הוא פונה החוצה מן הציר. לכן

$$\|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z\| = R.$$

כלומר

$$dS = R d\theta dz.$$

חרוט $z = \alpha r$.

נכתוב

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

החרוט הוא $z = \alpha r$, ולכן נבחר

$$\vec{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \alpha r).$$

אם חותכים את החרוט עד רדיוס R , אז

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

וקטורי המשיק הם

$$\vec{r}_r = (\cos \theta, \sin \theta, \alpha), \quad \vec{r}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0).$$

המכפלה

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_r = (\alpha r \cos \theta, \alpha r \sin \theta, -r)$$

נותנת נורמל שפונה החוצה מן החרוט. הנורמה היא

$$\|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_r\| = \sqrt{\alpha^2 r^2 \cos^2 \theta + \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta + r^2} = r \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

לכן

$$dS = r \sqrt{1 + \alpha^2} dr d\theta.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.3.2.

חשבו את שטח הפנים של הגוף החסום על ידי שני החרוטים ההפוכים

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

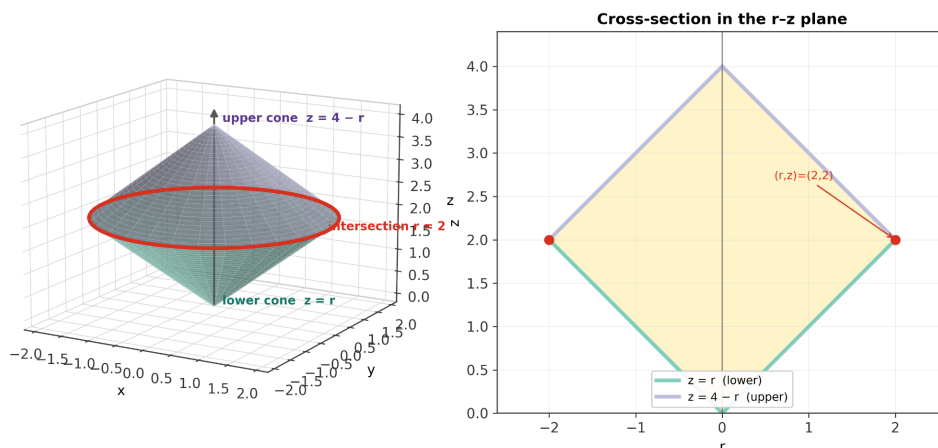
פתרון.

עיקרון מנחה

שני החרוטים נפגשים במעגל. שטח הפנים החיצוני של הגוף מורכב ממעטפת החרוט התחתון וממעטפת החרוט העליון. אין כאן בסיסים שטוחים, כי הגוף סגור על ידי שני החרוטים עצמם.

Two opposite cones: $z = r$ and $z = 4 - r$ (meet at $r = 2, z = 2$)

Surface formed by two opposite cones



שני חרוטים הפוכים: $z = r$ ו- $z = 4 - r$. הם נפגשים במעגל $r = 2, z = 2$.

נעבור לגליליות. נסמן

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

אז שני המשטחים הם

$$z = r, \quad z = 4 - r.$$

נקודת החיתוך מתקבלת מן השוויון

$$r = 4 - r.$$

לכן

$$2r = 4, \quad r = 2.$$

גובה החיתוך הוא

$$z = r = 2.$$

כלומר מעגל החיתוך הוא

$$r = 2, \quad z = 2.$$

נחשב קודם את שטח החרוט התחתון $z = r$. פרמטריזציה שלו היא

$$\vec{X}_1(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r),$$

כאשר

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

וקטורי המשיק הם

$$(\vec{X}_1)_r = (\cos \theta, \sin \theta, 1), \quad (\vec{X}_1)_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0).$$

לכן

$$\|(\vec{X}_1)_r \times (\vec{X}_1)_\theta\| = r\sqrt{2}.$$

שטח החרוט התחתון הוא

$$A_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\sqrt{2} \, dr \, d\theta.$$

נחשב:

$$A_1 = 2\pi\sqrt{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 = 2\pi\sqrt{2} \cdot 2 = 4\pi\sqrt{2}.$$

עבור החרוט העליון $z = 4 - r$, הפרמטריזציה היא

$$\vec{X}_2(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 4 - r),$$

עם אותו תחום פרמטרים. גם כאן מתקבל

$$\|(\vec{X}_2)_r \times (\vec{X}_2)_\theta\| = r\sqrt{2}.$$

לכן

$$A_2 = 4\pi\sqrt{2}.$$

שטח הפנים הכולל הוא

$$A = A_1 + A_2 = 4\pi\sqrt{2} + 4\pi\sqrt{2}.$$

כלומר

$$A = 8\pi\sqrt{2}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.3.3.

חשבו את שטח הפנים של טורוס הנוצר מסיבוב מעגל ברדיוס a סביב ציר הנמצא במרחק R ממרכז המעגל, כאשר $R > a > 0$.

פתרון.

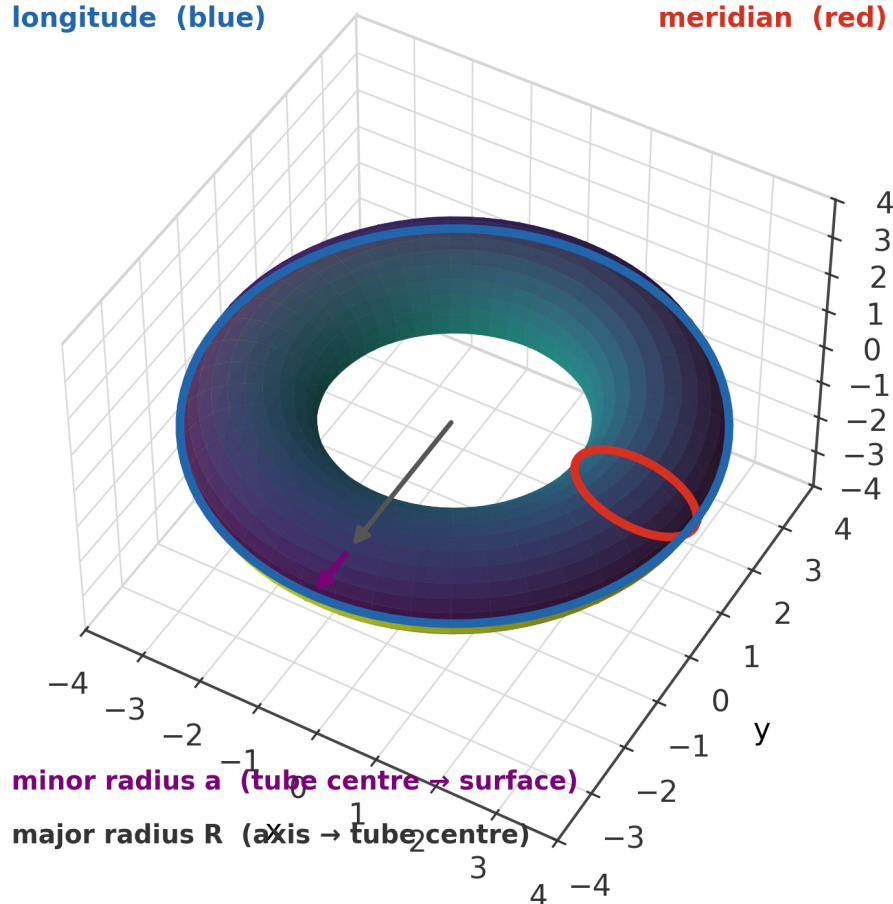
עיקרון מנחה

לטורוס יש שני סיבובים: סיבוב גדול סביב ציר הסימטריה, וסיבוב קטן סביב המעגל שיוצר את הצינור. לכן הפרמטרים הטבעיים הם שתי זוויות.

Torus surface area ($R = 3$, $a = 1$)

longitude (blue)

meridian (red)



טורוס. באיור מוצג המקרה $a = 1$, $R = 3$. החישוב למטה נעשה עבור $R > a > 0$ כללי.

נבחר פרמטריזציה

$$\vec{X}(u, v) = ((R + a \cos v) \cos u, (R + a \cos v) \sin u, a \sin v),$$

כאשר

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

הזווית u מסובבת סביב הציר המרכזי, והזווית v נעה על המעגל הקטן של הצינור. נחשב את וקטורי המשיק:

$$\vec{X}_u = (-(R + a \cos v) \sin u, (R + a \cos v) \cos u, 0),$$

$$\vec{X}_v = (-a \sin v \cos u, -a \sin v \sin u, a \cos v).$$

בחישוב המכפלה הווקטורית מתקבל

$$\vec{X}_u \times \vec{X}_v = a(R + a \cos v)(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$

לכן

$$\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = a(R + a \cos v) \sqrt{\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v}.$$

נפשט את הביטוי בתוך השורש:

$$\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v = \cos^2 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + \sin^2 v = 1.$$

לכן

$$\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = a(R + a \cos v).$$

מאחר ש- $0 < a < R$, מתקיים $R + a \cos v > 0$, ולכן אין צורך בערך מוחלט נוסף. שטח הפנים הוא

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(R + a \cos v) dv du.$$

נחשב את האינטגרל הפנימי:

$$\int_0^{2\pi} a(R + a \cos v) dv = \int_0^{2\pi} aR dv + \int_0^{2\pi} a^2 \cos v dv.$$

כעת

$$\int_0^{2\pi} aR dv = 2\pi aR, \quad \int_0^{2\pi} a^2 \cos v dv = 0.$$

לכן

$$A = \int_0^{2\pi} 2\pi aR du = 4\pi^2 Ra.$$

כלומר

$$A = 4\pi^2 Ra.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.3.4.

יהי S החלק של ההיפרבולואיד החד-יריעתי

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

שנמצא מחוץ לחלק העליון של החרוט

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2z, \quad z \geq 0.$$

החלק נלקח מן הגובה $z = 0$ ועד גובה החיתוך בין ההיפרבולואיד והחרוט. חשבו את השטף דרך S , בכיוון הנורמל החיצוני מן הציר, עבור השדה

$$\vec{F}(x, y, z) = (x - ye^{z^2}, y + xe^{z^2}, z).$$

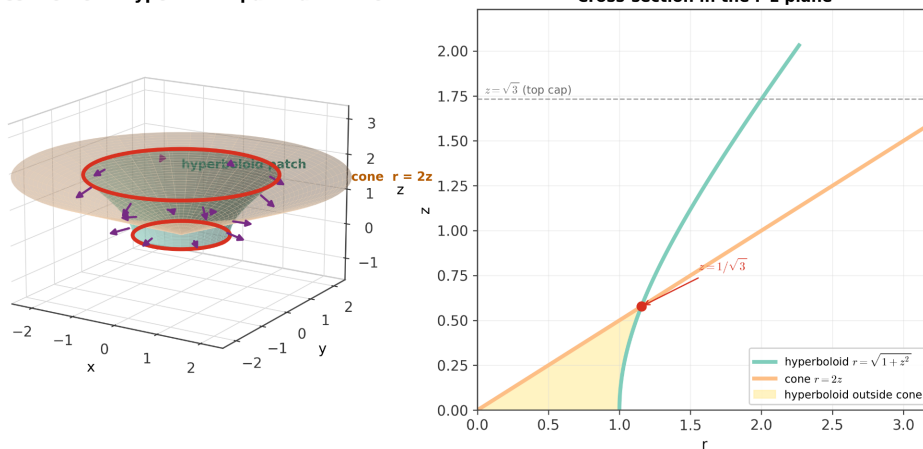
פתרון.

עיקרון מנחה

השדה נראה מסובך בגלל האיברים עם e^{z^2} , אבל הם בנויים כרכיב סיבובי סביב ציר z . הדיברגנץ שלהם מתאפס. לכן במקום לחשב שטף ישירות דרך ההיפרבולואיד, נסגור את המשטח ונשתמש במשפט גאוס.

Gauss / divergence theorem: closing the hyperboloid patch with caps

Gauss theorem: hyperboloid patch and cone



חתך rz : התחום הסגור נמצא בין החרוט $r = 2z$ לבין ההיפרבולואיד $r = \sqrt{1+z^2}$.

בגליליות מתקיים

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

ההיפרבולואיד הוא

$$r^2 - z^2 = 1,$$

ולכן

$$r = \sqrt{1 + z^2}.$$

החרוט הוא

$$r = 2z.$$

גובה החיתוך מתקבל מן המשוואה

$$2z = \sqrt{1 + z^2}.$$

נעלה בריבוע:

$$4z^2 = 1 + z^2.$$

לכן

$$3z^2 = 1, \quad z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

לקחנו את השורש החיובי כי מדובר בחלק העליון של החרוט.

נסגור את S בעזרת שני משטחים נוספים: חלק החרוט $r = 2z$, והדיסק התחתון $z = 0$, $0 \leq r \leq 1$. הנפח הסגור הוא

$$\Omega = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 2z \leq r \leq \sqrt{1 + z^2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

נחשב את הדיברגנץ:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x - ye^{z^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(y + xe^{z^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(z).$$

כל נגזרת היא

$$\frac{\partial}{\partial x}(x - ye^{z^2}) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y}(y + xe^{z^2}) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1.$$

לכן

$$\nabla \cdot \vec{F} = 3.$$

לפי משפט גאוס, השטף דרך כל המשטח הסגור הוא

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} 3 dV.$$

נחשב את הנפח של Ω :

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{3}} \int_{2z}^{\sqrt{1+z^2}} r dr dz d\theta.$$

האינטגרל לפי r הוא

$$\int_{2z}^{\sqrt{1+z^2}} r dr = \frac{1}{2} ((1 + z^2) - 4z^2) = \frac{1}{2} (1 - 3z^2).$$

לכן

$$\text{Vol}(\Omega) = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{2}(1 - 3z^2) dz = \pi \int_0^{1/\sqrt{3}} (1 - 3z^2) dz.$$

נחשב:

$$\text{Vol}(\Omega) = \pi [z - z^3]_0^{1/\sqrt{3}} = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

לכן השטף דרך כל המשטח הסגור הוא

$$\iiint_{\Omega} 3 dV = 3 \cdot \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

נשאר לבדוק מה השטף דרך שני המשטחים שהוספנו כדי לסגור את S .
על הדיסק התחתון מתקיים $z = 0$, והנורמל החיצוני הוא

$$\vec{n} = (0, 0, -1).$$

לכן

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = -z = 0.$$

מכאן שהשטף דרך הדיסק התחתון הוא אפס.
כעת נבדוק את החרוט. פרמטריזציה של החרוט היא

$$\vec{X}(z, \theta) = (2z \cos \theta, 2z \sin \theta, z),$$

כאשר

$$0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

וקטורי המשיק הם

$$\vec{X}_z = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 1), \quad \vec{X}_\theta = (-2z \sin \theta, 2z \cos \theta, 0).$$

וקטור שטח מכוון החוצה מן הנפח, כלומר לכיוון הקטן של r , הוא

$$\vec{X}_z \times \vec{X}_\theta = (-2z \cos \theta, -2z \sin \theta, 4z).$$

על החרוט מתקיים

$$x = 2z \cos \theta, \quad y = 2z \sin \theta.$$

לכן

$$\vec{F}(\vec{X}(z, \theta)) = (2z \cos \theta - 2z \sin \theta e^{z^2}, 2z \sin \theta + 2z \cos \theta e^{z^2}, z).$$

נחשב את המכפלה הסקלרית עם וקטור השטח:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{X}) \cdot (\vec{X}_z \times \vec{X}_\theta) &= (2z \cos \theta - 2z \sin \theta e^{z^2})(-2z \cos \theta) \\ &\quad + (2z \sin \theta + 2z \cos \theta e^{z^2})(-2z \sin \theta) + z(4z). \end{aligned}$$

נפתח:

$$-4z^2 \cos^2 \theta + 4z^2 \sin \theta \cos \theta e^{z^2} - 4z^2 \sin^2 \theta - 4z^2 \sin \theta \cos \theta e^{z^2} + 4z^2.$$

האיברים עם e^{z^2} מתבטלים, ולכן נשאר

$$-4z^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 4z^2 = 0.$$

לכן השטף דרך החרוט הוא אפס.
מצאנו שהשטף דרך הדיסק והחרוט הוא אפס, ולכן כל השטף של המשטח הסגור הוא בדיוק השטף דרך ההיפרבולואיד S . לכן

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

□

ניצחון

יוצא על ידי חן גדי