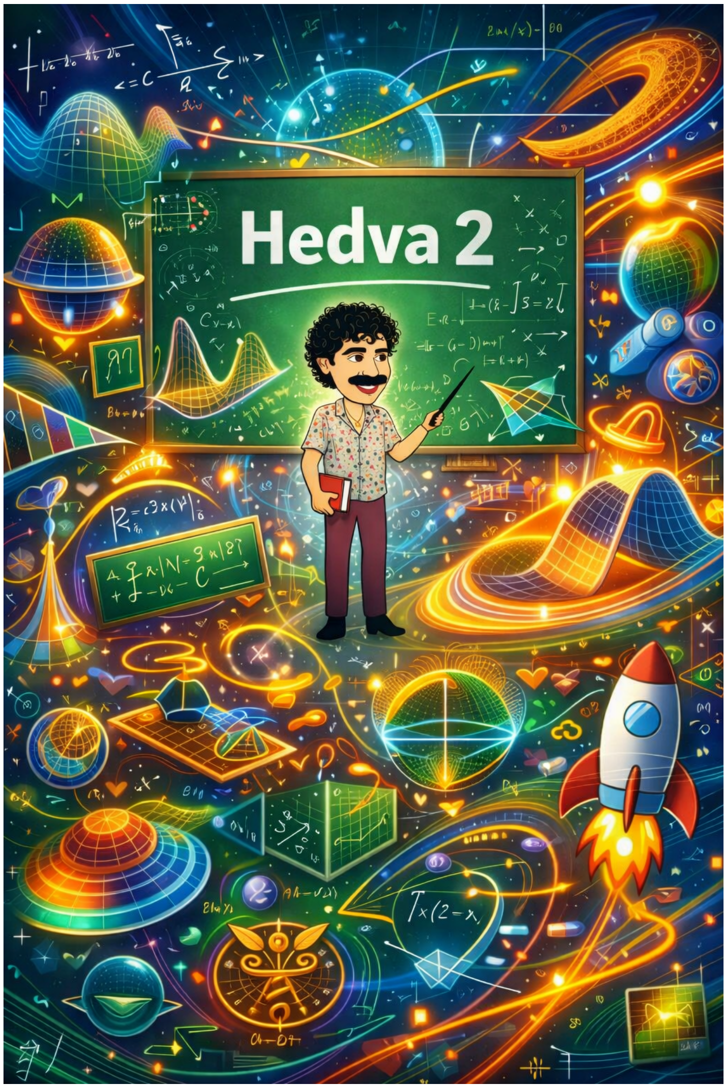
חדו"א 2 להנדסות

סיכומים ותרגולים



נערך ונכתב על ידי חן גדי
ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המחייב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

תוכן העניינים

תרגול 2 - טורי פונקציות ועוד

1.1 התכנסות סדרות פונקציות - המשך

1.1.1 קריטריון הסופרימום, התכנסות נקודתית והתכנסות במידה שווה

תזכורת (מההרצאה)

יהא $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע, ותהא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל n,

$$f_n : I \to \mathbb{R}.$$

נאמר כי f_n **מתכנסת נקודתית** לפונקציה $f : I \to \mathbb{R}$ אם לכל $x_0 \in I$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

כלומר, לכל נקודה קבועה x_0, סדרת המספרים $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן של חדו"א 1.

תזכורת (מההרצאה)

נאמר כי f_n **מתכנסת במידה שווה** לפונקציה f על I אם

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall x \in I, \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

נסמן גם

$$f_n \twoheadrightarrow f \qquad \text{ON} I.$$

תזכורת (מההרצאה)

קריטריון הסופרימום: אם $f_n, f : I \to \mathbb{R}$, אז

$$f_n \rightrightarrows f \text{ על } I$$

אם ורק אם

$$\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

בפועל, כאשר רוצים לבדוק התכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות, זה בדרך כלל הכלי הראשון שכדאי לנסות.

תרגיל 1.1.1.

יהא $\lambda > 0$. עבור

$$f_n(x) = (1 + x^\lambda)^{1/n} - 1, \qquad x \in [0, A],$$

כאשר $A > 0$ קבוע, מצאו את הפונקציה הגבולית והוכיחו כי ההתכנסות היא במידה שווה על $[0, A]$.

פתרון.

יהי $x_0 \in [0, A]$. נחשב:

$$f_n(x_0) = (1 + x_0^\lambda)^{1/n} - 1.$$

מאחר שלכל מספר חיובי קבוע $c > 0$ מתקיים $c^{1/n} \to 1$, נקבל

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 1 - 1 = 0.$$

לכן הפונקציה הגבולית היא

$$f(x) \equiv 0.$$

כעת נבדוק התכנסות במידה שווה. עבור $x \in [0, A]$ נקבל

$$0 \le f_n(x) = (1 + x^\lambda)^{1/n} - 1 \le (1 + A^\lambda)^{1/n} - 1,$$

מפני שהפונקציה $t \mapsto t^{1/n}$ עולה עבור $t > 0$.

לכן

$$\sup_{x\in[0,A]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,A]} \left((1 + x^\lambda)^{1/n} - 1\right) \le (1 + A^\lambda)^{1/n} - 1.$$

מצד שני, עבור $x = A$ מתקיים שוויון, ולכן למעשה

$$\sup_{x\in[0,A]} |f_n(x)| = (1 + A^\lambda)^{1/n} - 1.$$

כאשר $n \to \infty$, נקבל

$$(1 + A^\lambda)^{1/n} - 1 \to 0.$$

לכן

$$f_n \twoheadrightarrow 0 \qquad \text{ON}[0,A].$$

$\square$

1.1.2 רציפות של הגבול כאשר יש התכנסות במידה שווה

תזכורת (מההרצאה)

אם סדרת פונקציות רציפות $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה f על קטע I, אז גם f רציפה על I. זהו כלי חשוב במיוחד כדי להוכיח ש**אין** התכנסות במידה שווה: מספיק לעיתים למצוא שפונקציית הגבול איננה רציפה.

דוגמה 1.1.2.

תהי סדרת הפונקציות

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x), \qquad x \in [0,1].$$

מצאו את פונקציית הגבול. קבעו האם ההתכנסות היא במידה שווה על $[0,1]$, ומה קורה על כל קטע $[0,b]$ כאשר $0<b<1$.

פתרון!

נחשב תחילה את הגבול הנקודתי...

אם $0 \le x_0 < 1$, אז $x_0^n \to 0$, בעוד $\ln(1+x_0)$ הוא מספר קבוע. לכן

$$f_n(x_0) = x_0^n \ln(1+x_0) \to 0.$$

אם $x_0 = 1$, אז

$$f_n(1) = 1^n \ln 2 = \ln 2.$$

לכן פונקציית הגבול היא

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ \ln 2, & x = 1. \end{cases}$$

פונקציה זו איננה רציפה ב-1.

כל f_n רציפה על $[0,1]$, ולכן לא תיתכן התכנסות במידה שווה על $[0,1]$.

כעת נבדוק מה קורה על $[0,b]$, כאשר $0<b<1$. לכל $x \in [0,b]$ מתקיים

$$|f_n(x)| = x^n \ln(1+x) \le x^n \ln(1+b) \le b^n \ln(1+b).$$

מאחר ש-$b^n \to 0$, נקבל

$$\sup_{x\in[0,b]} |f_n(x)| \le b^n \ln(1+b) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

לכן
$$f_n \twoheadrightarrow 0 \qquad \text{ON}[0,b],\ 0<b<1.$$
מה קורה אם זה קטע פתוח?

תרגיל 1.1.3.

יהי הפרמטר $\beta>0$, ותהא סדרת הפונקציות
$$f_n(x)=\frac{nx}{1+nx+\beta nx^2}, \qquad x\in[0,\infty).$$
מצאו את הפונקציה הגבולית ובדקו האם ההתכנסות היא במידה שווה על $[0,\infty)$.

פתרון.
נחשב תחילה את הגבול הנקודתי.
יהי $x_0\in[0,\infty)$.
אם $x_0=0$, אז
$$f_n(0)=0,$$
ולכן
$$\lim_{n\to\infty} f_n(0)=0.$$
אם $x_0>0$, נחלק מונה ומכנה ב-n:
$$f_n(x_0)=\frac{x_0}{\frac{1}{n}+x_0+\beta x_0^2}.$$
כאשר $n\to\infty$, נקבל
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=\frac{x_0}{x_0+\beta x_0^2}=\frac{1}{1+\beta x_0}.$$
לכן הפונקציה הגבולית היא
$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{1}{1+\beta x}, & x>0.\end{cases}$$
אבל נשים לב כי גם עבור $x=0$ מתקיים
$$\frac{1}{1+\beta x}=1.$$
ולכן הביטוי הזה אינו מתאים בנקודה 0. כלומר הגבול נקודתי איננו פונקציה רציפה ב-0.
עתה נבדוק אם ההתכנסות במידה שווה. מאחר שכל f_n רציפות על $[0,\infty)$, ואם הייתה התכנסות במידה שווה אז גם הגבול היה חייב להיות רציף, נקבל מיד שההתכנסות איננה במידה שווה על $[0,\infty)$.
כדי להראות זאת גם ישירות, נבחר $x_n=\frac{1}{n}$. אז
$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{1+1+\beta/n}=\frac{1}{2+\beta/n}.$$

מצד שני, כיון ש-$\frac{1}{n} > 0$, פונקציית הגבול מקיימת

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+\beta/n}.$$

לכן

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{1}{2+\beta/n} - \frac{1}{1+\beta/n}\right|.$$

נעביר למכנה משותף:

$$\left|\frac{1+\beta/n-(2+\beta/n)}{(2+\beta/n)(1+\beta/n)}\right| = \frac{1}{(2+\beta/n)(1+\beta/n)}.$$

כאשר $n \to \infty$, הביטוי שואף ל-

$$\frac{1}{2}.$$

לכן בפרט

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{(2+\beta/n)(1+\beta/n)},$$

ולכן הסופרימום אינו שואף לאפס.
מסקנה: קיימת התכנסות נקודתית, אך אין התכנסות במידה שווה על $[0,\infty)$.

□

תרגיל 1.1.4.

תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a-1,b+1]$. נגדיר עבור כל $n \in \mathbb{N}$ את הפונקציה:

$$h_n(x) := n\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |f(t) - f(x)|\, dt \quad \forall x \in [a,b]$$

הוכח: אם $h_n(x) \rightrightarrows 0$ במידה שווה על $[a,b]$, אז f רציפה ב-$[a,b]$.

פתרון.
נניח ש-$h_n(x) \rightrightarrows 0$ במידה שווה ב-$[a,b]$, כלומר:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \ \forall x \in [a,b] \quad h_n(x) < \varepsilon$$

נפרט את הביטוי:

$$h_n(x) = n\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |f(t) - f(x)|\, dt$$

כעת, נשתמש באי־שוויון אינטגרלי בסיסי: לכל פונקציה אינטגרבילית g, מתקיים:

$$\left|\int_c^d g(x)dx\right| \leq \int_c^d |g(x)|dx \quad \text{(מחדווא 1)}$$

נחיל זאת על $g(t) := f(t) - f(x)$, ונקבל:

$$\left|\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (f(t) - f(x))dt\right| \leq \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |f(t) - f(x)|dt$$

נכפיל ב־n, ונקבל:

$$\left|n\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (f(t) - f(x))dt\right| \leq n\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |f(t) - f(x)|dt = h_n(x)$$

אבל האגף השמאלי הוא בדיוק:

$$\left|n\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt - 2f(x)\right|$$

כלומר:

$$\left|n\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt - 2f(x)\right| \leq h_n(x)$$

ומכיוון שלפי הנחת השאלה $h_n(x) \to 0$ במידה שווה, אז בפרט:

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|n\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt - 2f(x)\right| \to 0$$

כלומר:

$$n\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt \twoheadrightarrow 2f(x) \quad \text{במידה שווה}$$

כעת נגדיר:

$$g_n(x) := n\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

הוכחנו:

$$g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2f(x)$$

ומאחר שכל g_n הן רציפות מתקיים:

1. g_n רציפות לכל n
2. $g_n \to 2f$ במידה שווה

ולכן $2f$ רציפה ולכן f רציפה בקטע $[a,b]$ ■

□

ניצחון

רעיון לתרגילים נוספים: לנסות להוכיח בשלילה, להוכיח/להפריך כיוון נגדי

1.1.3 הערות נוספות

דוגמה פשוטה מאוד לסדרת פונקציות רציפות המתכנסת נקודתית אך לא במידה שווה

נגדיר

$$f_n(x) = x^n, \qquad x \in [0,1].$$

כל פונקציה f_n רציפה על $[0,1]$.
נחשב את הגבול הנקודתי.
אם $0 \le x < 1$, אז

$$x^n \to 0.$$

אם $x = 1$, אז

$$1^n = 1.$$

לכן פונקציית הגבול היא

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

כלומר, הסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת נקודתית ל-f על $[0,1]$.
כעת נבדוק האם ההתכנסות היא במידה שווה.
מאחר שכל f_n רציפה על $[0,1]$, אילו הייתה התכנסות במידה שווה, אז גם f הייתה חייבת להיות רציפה על $[0,1]$.
אבל f איננה רציפה בנקודה $x = 1$, משום שלכל $x < 1$ מתקיים $f(x) = 0$, ואילו

$$f(1) = 1.$$

לכן ההתכנסות איננה במידה שווה על $[0,1]$.

שאלה למחשבה

אם אני קטע פתוח שמוכל בקטע סגור אני מתכנס במש אבל מה קורה ההפך? אם הקטע "הפתוח" הוא למעשה קבוצה גדולה יותר, למשל $(0,\infty)$, בהחלט ייתכן שעל קטע סגור וחסום מסוים יש התכנסות במידה שווה, אבל על $(0,\infty)$ אין התכנסות במידה שווה.
זה לא סותר שום דבר, כי $[a,b]$ איננו מכיל את $(0,\infty)$, אלא להפך, $[a,b] \subset (0,\infty)$. התכנסות במידה שווה על קבוצה קטנה אינה מחייבת התכנסות במידה שווה על קבוצה גדולה יותר.
לעומת זאת, אם יש התכנסות במידה שווה על קטע סגור $[a,b]$, אז אוטומטית יש התכנסות במידה שווה גם על כל תת-קבוצה שלו, ובפרט על (a,b). לכן על קטע פתוח *סופי* המוכל בתוך אותו קטע סגור, אי אפשר שייכשלו במידה שווה אם כבר יש הצלחה על הסגור.

למה על קטע פתוח סופי זה בלתי אפשרי

נניח כי

$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{on}[a,b].$$

אז לכל n,

$$\sup_{x\in(a,b)}|f_n(x)-f(x)|\leq \sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|.$$

אם האגף הימני שואף ל-0, אז גם האגף השמאלי שואף ל-0. לכן

$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{on}(a,b).$$

שימו לב: בטיעון הזה בכלל לא השתמשנו ברציפות של f_n או של f. זהו משפט כללי על סופרימום ועל תת-קבוצות בלבד.
לכן גם אם סדרת הפונקציות $\{f_n\}$ איננה רציפה, עדיין *אי אפשר* לקבל מצב שבו יש התכנסות במידה שווה על $[a,b]$ אבל אין התכנסות במידה שווה על (a,b).

דוגמה שכן אפשרית: על כל קטע סגור וחסום כן, אבל על קטע לא חסום לא

נגדיר

$$f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}, \qquad x\in(0,\infty).$$

נחשב תחילה גבול נקודתי. יהי $x>0$ קבוע. אז

$$f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

לכן

$$f_n(x)\to 0 \qquad \text{every for} x\in(0,\infty).$$

כעת נבדוק מה קורה על קטע סגור וחסום $[a,b]\subset(0,\infty)$, כאשר $0<a<b$.
לכל $x\in[a,b]$ מתקיים

$$|f_n(x)|=\frac{x}{1+nx^2}\leq\frac{x}{nx^2}=\frac{1}{nx}\leq\frac{1}{na}.$$

לכן

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)|\leq\frac{1}{na}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

ומכאן

$$f_n\rightrightarrows 0 \qquad \text{on}[a,b].$$

אבל על כל $(0,\infty)$ אין התכנסות במידה שווה. אכן, נציב $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$. נקבל

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1/\sqrt{n}}{1+n\cdot(1/n)}=\frac{1/\sqrt{n}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

זה כן שואף ל-0, ולכן הנקודה הזאת עדיין לא מספיקה להפריך אחידות. נחשב נכון את הסופרימום.
נגדיר

$$g_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}, \qquad x>0.$$

נגזור:

$$g_n'(x)=\frac{(1+nx^2)-x\cdot 2nx}{(1+nx^2)^2}=\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}.$$

נקודת הקיצון מתקבלת כאשר

$$1-nx^2=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

לכן

$$\sup_{x>0} g_n(x)=g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1/\sqrt{n}}{1+1}=\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

אבל זה דווקא כן שואף ל-0, ולכן הדוגמה הזאת כן מתכנסת במידה שווה על $(0,\infty)$, ולכן אינה מתאימה.
ניקח דוגמה נכונה:

$$f_n(x)=e^{-nx}, \qquad x\in(0,\infty).$$

לכל $x>0$ קבוע מתקיים

$$e^{-nx}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

ולכן יש התכנסות נקודתית ל-0 על $(0,\infty)$.
על כל קטע סגור $[a,b]\subset(0,\infty)$, כאשר $a>0$, נקבל

$$0<e^{-nx}\le e^{-na} \qquad \forall x\in[a,b].$$

לכן

$$\sup_{x\in[a,b]}|e^{-nx}-0|=e^{-na}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

כלומר,

$$e^{-nx}\rightrightarrows 0 \qquad \text{every on}[a,b]\subset(0,\infty),\ a>0.$$

אבל על כל $(0,\infty)$,

$$\sup_{x>0} e^{-nx}=1,$$

מפני שכאשר $x\to 0^+$, הערכים e^{-nx} מתקרבים ל-1. לכן

$$\sup_{x>0}|e^{-nx}-0|=1$$

לכל n, ומכאן שאין התכנסות במידה שווה על $(0,\infty)$.
זוהי דוגמה קלאסית לכך שעל כל קטע סגור המרוחק מאפס יש התכנסות במידה שווה, אבל על הקטע הפתוח הגדול $(0,\infty)$ אין.

מסקנה מסודרת

יש להבחין בין שני מצבים:

1. אם יש התכנסות במידה שווה על $[a,b]$, אז בהכרח יש התכנסות במידה שווה גם על (a,b). זה נכון תמיד, גם בלי רציפות.
2. אם יש התכנסות במידה שווה על כל קטע סגור וחסום $[a,b]\subset(0,\infty)$, עדיין ייתכן שלא תהיה התכנסות במידה שווה על כל $(0,\infty)$. זה קורה כי $(0,\infty)$ היא קבוצה גדולה יותר ולא חסומה ליד 0 או באינסוף.

1.2 טורי פונקציות

תזכורת (מההרצאה)

עד כה, בחדו"א 1, עסקנו בעיקר בטורים מספריים מן הצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

כאשר כל a_n הוא מספר ממשי. בטור פונקציות מחליפים את המספרים בפונקציות, ומקבלים טור מן הצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

כאשר לכל n, הפונקציה u_n מוגדרת על קטע $I \subseteq \mathbb{R}$. במצב זה, עבור כל $x \in I$, מתקבל טור מספרי רגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

לכן, השאלה הראשונה היא תמיד: עבור אילו x הטור מתכנס, ומהי פונקציית הסכום המתקבלת?

תזכורת (מההרצאה)

אם נגדיר את הסכומים החלקיים של הטור על ידי

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x),$$

אז חקר הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

שקול לחקר סדרת הפונקציות $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$. אם קיימת פונקציה $S : I \to \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$,

$$S_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} S(x),$$

אז אומרים שטור הפונקציות מתכנס נקודתית ל-S, וכותבים

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x).$$

הפונקציה S נקראת **פונקציית הסכום** של הטור.

תזכורת (מההרצאה)

כמו בסדרות פונקציות, גם בטורי פונקציות יש הבדל מהותי בין התכנסות נקודתית לבין התכנסות במידה שווה.
התכנסות נקודתית פירושה שלכל x קבוע, הטור המספרי

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

מתנהג היטב ומתכנס.
לעומת זאת, התכנסות במידה שווה היא דרישה חזקה הרבה יותר: היא מבטיחה שהסכומים החלקיים S_N מתקרבים לפונקציית הסכום S באופן אחיד בכל הנקודות בקטע, ולא רק נקודה אחר נקודה. דווקא תכונה זו היא שמאפשרת להעביר תכונות חשובות מן האיברים u_n אל פונקציית הסכום, למשל רציפות ואינטגרביליות.

תזכורת (מההרצאה)

הסיבה שטורי פונקציות חשובים כל כך היא שהם מאפשרים לייצג פונקציות מסובכות באמצעות סכום של פונקציות פשוטות יותר. זהו רעיון מרכזי מאוד באנליזה.
לדוגמה:

1. טורי חזקות מייצגים פונקציות בעזרת חזקות של $(x-a)$.
2. טורי פורייה מייצגים פונקציות בעזרת סינוסים וקוסינוסים.
3. באנליזה כללית ובפיזיקה משתמשים בטורי פונקציות כדי לקרב פונקציות, לפתור משוואות, ולבצע אינטגרציה או גזירה בצורה נוחה יותר.

כלומר, במקום לעבוד ישירות עם פונקציה מסובכת, מנסים לפרק אותה לסכום אינסופי של אבני בניין פשוטות.

תזכורת (מההרצאה)

כאשר חוקרים טור פונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

בדרך כלל בודקים את הדברים הבאים:

1. עבור אילו x הטור מתכנס.
2. האם ההתכנסות היא נקודתית בלבד או גם במידה שווה.
3. האם פונקציית הסכום רציפה.

4. האם מותר לבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

5. בהמשך, כאשר התנאים חזקים יותר, האם מותר גם לגזור איבר איבר.

1.2.1 דוגמאות לפני ווישטראוס

תרגיל 1.2.1.

1. הוכיחו בבקשה שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$$

מתכנס לכל $x \geq 0$.

2. בדקו בבקשה האם הטור מתכנס במידה שווה ב־$[1,\infty)$.
3. עבור $x \geq 1$, מצאו בבקשה את הפונקציה הגבולית.

פתרון.

סעיף זה בעצם אומר לנו חברה תבדקו התכנסות נקודתית בבקשה. ולכן בעצם נצטרך לקבע x_0 ולבדוק התכנסות של טורים מחדווא 1.

נסמן:

$$u_n(x) := \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$$

א. נוכיח שהטור מתכנס לכל $x \geq 0$:

- אם $0 \leq x < 1$, אז $u_n(x) \leq x^n$, והטור $\sum x^n$ מתכנס. לכן, לפי מבחן ההשוואה:

$$\sum u_n(x) < \infty, \forall x \in [0,1)$$

- אם $x = 1$, אז:

$$u_n(1) = \frac{1}{(1+1)(1+1^2)\cdots(1+1^n)} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum u_n(1) < \infty.$$

- אם $x > 1$, נגדיר:

$$u_n(x) = \frac{x^n+1-1}{(1+x)\cdots(1+x^n)} = \frac{1}{(1+x)\cdots(1+x^{n-1})} - \frac{1}{(1+x)\cdots(1+x^n)}$$

וגם:

$$u_1(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

ולכן, הטור טלסקופי. נסמן את סכום חלקי:

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$$

נמשיך עם סעיף 2 ו3 . כלומר, נוכיח שהטור מתכנס במידה שווה אל הפונקציה הגבולית $s(x) = 1$.
נשים לב כי לכל $x \geq 1$, מתקיים:

$$1 + x^k \geq 2 \Rightarrow (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n) \geq 2^n \Rightarrow 0 < \frac{1}{(1+x)\cdots(1+x^n)} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ומכאן:

$$|S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

עבור כל $\varepsilon > 0$, נבחר N כך ש־$\left(\frac{1}{2}\right)^N < \varepsilon$, ואז לכל $n > N$, לכל $x \geq 1$, מתקיים:

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in[1,\infty)} |S_n(x) - S(x)| \to 0$$

ולכן הטור מתכנס במידה שווה ב־$[1,\infty)$.
כפי שראינו:

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \Rightarrow S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1$$

$\square$

ניצחון

תרגיל 1.2.2.

עבור הקטע $I = [1,\infty)$ קבעו בבקשה אם הטורים הבאים מתכנסים במידה שווה בקטע, ובמידת האפשר מצאו בבקשה את הפונקציה הגבולית..

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min(xn!\,,\, \frac{1}{xn!})$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n+1)\sin\left(\frac{x}{n+1}\right)}{x} - \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x} \right)$$

פתרון.

1. עבור $x \in [1,\infty)$, $xn! \geq 1$, ולכן:

$$\min(xn!\,,\frac{1}{xn!}) = \frac{1}{xn!}$$

ולכן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min(xn!\,,\frac{1}{xn!}) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

והטור מוכר לנו:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$$

ולכן הפונקציה הגבולית היא $\frac{e}{x}$ וההתכנסות היא במ"ש לפי מבחן הסופרימום:

$$M_N = \sup_{x\in[1,\infty)}\left|\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} - \frac{e}{x}\right| = \sup_{x\in[1,\infty)}\left|\frac{1}{x}\right| \cdot \left|\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right| = \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

וזה מתכנס כי זה זנב של טור מתכנס. $\square$

2. הטור הנתון הוא טור טלסקופי מהצורה:

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{(n+1)\sin\left(\frac{x}{n+1}\right)}{x} - \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x}\right)$$

נציין כי מתקיים:

$$S_k(x) = \frac{(k+1)\sin\left(\frac{x}{k+1}\right)}{x} - \frac{\sin(x)}{x}$$

נחשב את גבול סכומי החלקיים:

$$S(x) = \lim_{k\to\infty} S_k(x) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)\sin\left(\frac{x}{k+1}\right)}{x} - \frac{\sin x}{x}\right)$$

נסמן $t_k = \frac{x}{k+1}$, ונקבל:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)\sin\left(\frac{x}{k+1}\right)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow S(x) = 1 - \frac{\sin x}{x}$$

לכן לכל $x \in [1,\infty)$, הפונקציה הגבולית היא:

$$S(x) = 1 - \frac{\sin x}{x}$$

כעת נבדוק אם ההתכנסות היא במידה שווה בקטע $[1,\infty)$.

נבחר סדרת נקודות:

$$x_k = \pi(k+1)$$

אזי:

$$S_k(x_k) = \frac{(k+1)\sin\left(\frac{\pi(k+1)}{k+1}\right)}{\pi(k+1)} - \frac{\sin(\pi(k+1))}{\pi(k+1)} = \frac{\sin\pi}{\pi} - \frac{\sin\pi(k+1)}{\pi(k+1)} = 0$$

מאידך:

$$S(x_k) = 1 - \frac{\sin(\pi(k+1))}{\pi(k+1)} = 1$$

ולכן:

$$|S_k(x_k) - S(x_k)| = 1 \Rightarrow \sup_{x\geq 1}|S_k(x) - S(x)| \geq 1$$

ומכאן שהטור לא מתכנס במידה שווה בקטע $[1,\infty)$.

$\square$

$\square$

ניצחון

1.2.2 מבחן ויירשטראס לטורי פונקציות

תזכורת (מההרצאה)

אחד הכלים החשובים ביותר בטורי פונקציות הוא מבחן M של ויירשטראס.
אם אפשר למצוא סדרת מספרים אי-שליליים $\{M_n\}$ כך שלכל $x \in I$,

$$|u_n(x)| \leq M_n,$$

והטור המספרי

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

מתכנס, אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

מתכנס בהחלט ובמידה שווה על I.
הרעיון כאן פשוט אך חזק מאוד: במקום לבדוק ישירות את טור הפונקציות, משווים אותו לטור מספרי מתכנס שאינו תלוי ב-x. ברגע שמתקבל חסם אחיד כזה, מקבלים שליטה טובה על כל הטור.

הערה פורמלית

מספר הערות על מבחן M של ויירשטראס:

1. כדי להשתמש במבחן אין צורך לדעת מהי הפונקציה הגבולית של הטור.
2. מעבר להתכנסות במידה שווה, המבחן גם מראה לנו כי הטור מתכנס בהחלט, כלומר הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

מתכנס נקודתית בI.

דוגמה 1.2.3.

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right)$ מתכנס במ"ש ב$\mathbb{R}$?
רמז, ראינו בחדוו"א 1 כי לכל $t \geq 0$ מתקיים $\ln(1+t) \leq t$.
פתרון!
כאן נוכל להשתמש ישר במבחן M של ויירשטראס, כי בעזרת הרמז:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right) \leq \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

כלומר, אם $M_n=\frac{1}{n^2}$, אז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי לכל $x\in\mathbb{R}$, $\left|\ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right)\right|\leq\frac{1}{n^2}$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2+x^2}\right)$ מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

תרגיל 1.2.4.

דוגמה. יהי $\gamma>0$. בדקו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^\gamma}{n^2(1+x^{2\gamma})}$$

מתכנס במידה שווה על $\mathbb{R}$.

פתרון.
נסמן

$$u_n(x)=\frac{x^\gamma}{n^2(1+x^{2\gamma})}.$$

כדי להפעיל את מבחן ויירשטראס נחפש חסם אחיד ב-x.
ראשית נשים לב כי די לעבור על $x\geq 0$, כי הביטוי תלוי למעשה ב-$|x|$ כאשר γ זוגי, ובכל מקרה נוכל להעריך בעזרת $|x|^\gamma$. נקבל

$$|u_n(x)|=\frac{|x|^\gamma}{n^2(1+|x|^{2\gamma})}.$$

כעת, לכל $t\geq 0$ מתקיים

$$\frac{t}{1+t^2}\leq\frac{1}{2},$$

משום ש

$$2t\leq 1+t^2\iff 0\leq(t-1)^2.$$

נבחר

$$t=|x|^\gamma.$$

נקבל

$$\frac{|x|^\gamma}{1+|x|^{2\gamma}}\leq\frac{1}{2}.$$

לכן לכל $x\in\mathbb{R}$,

$$|u_n(x)|\leq\frac{1}{2n^2}.$$

נבחר אם כן

$$M_n=\frac{1}{2n^2}.$$

מאחר שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$$

מתכנס, מבחן ויירשטראס נותן כי הטור הנתון מתכנס בהחלט ובמידה שווה על $\mathbb{R}$.

$\square$

תרגיל 1.2.5.

יהיו $a>0$ ו-$p>1$. בדקו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p(1+ax^2)}$$

מתכנס במידה שווה על $\mathbb{R}$.

פתרון.
נסמן

$$u_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n^p(1+ax^2)}.$$

לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$|u_n(x)|\le\frac{|\sin(nx)|}{n^p(1+ax^2)}\le\frac{1}{n^p(1+ax^2)}\le\frac{1}{n^p}.$$

נבחר

$$M_n=\frac{1}{n^p}.$$

מאחר ש-$p>1$, הטור המספרי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

מתכנס. לכן לפי מבחן ויירשטראס הטור הנתון מתכנס בהחלט ובמידה שווה על $\mathbb{R}$.
בנוסף, כל איבר u_n רציף, ולכן פונקציית הסכום רציפה על $\mathbb{R}$.

$\square$

תרגיל 1.2.6.

יהיו $\alpha>0$ ו-$q>1$. הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^\alpha}{n^q(1+nx^{2\alpha})}$$

מתכנס במידה שווה על $[0,\infty)$.

פתרון.

נסמן

$$u_n(x) = \frac{x^\alpha}{n^q(1+nx^{2\alpha})}.$$

נכתוב

$$|u_n(x)| = \frac{x^\alpha}{n^q(1+nx^{2\alpha})}.$$

כדי לקבל חסם חד יותר, נציב

$$t = \sqrt{n}\,x^\alpha.$$

אז

$$nx^{2\alpha} = t^2, \qquad x^\alpha = \frac{t}{\sqrt{n}}.$$

לכן

$$|u_n(x)| = \frac{\frac{t}{\sqrt{n}}}{n^q(1+t^2)} = \frac{1}{n^{q+1/2}} \cdot \frac{t}{1+t^2}.$$

כפי שראינו קודם,

$$\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}.$$

לכן

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{2n^{q+1/2}}.$$

מאחר שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{q+1/2}}$$

מתכנס, נקבל ממבחן ויירשטראס כי הטור מתכנס במידה שווה על $[0,\infty)$.

□

תרגיל 1.2.7.

יהא $r > 0$. בדקו האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^2e^{-rn^2|x|}$$

מתכנס במידה שווה על $\mathbb{R}$.

פתרון.
נסמן

$$u_n(x) = n^2x^2e^{-rn^2|x|}.$$

כדי להפעיל את מבחן ויירשטראס נחפש חסם אחיד. בגלל הערך המוחלט די לבדוק $x \geq 0$. נגדיר

$$g_n(x) = n^2x^2e^{-rn^2x}, \qquad x \geq 0.$$

נגזור:

$$g_n'(x) = n^2\left(2xe^{-rn^2x} + x^2 \cdot (-rn^2)e^{-rn^2x}\right).$$

נוציא גורם משותף:

$$g_n'(x) = n^2e^{-rn^2x}(2x - rn^2x^2).$$

כלומר

$$g_n'(x) = n^2e^{-rn^2x}x(2 - rn^2x).$$

לכן נקודות הקריטיות הן

$$x = 0 \qquad \text{או} \qquad x = \frac{2}{rn^2}.$$

הנקודה הפנימית נותנת מקסימום. נחשב:

$$g_n\left(\frac{2}{rn^2}\right) = n^2 \cdot \frac{4}{r^2n^4} \cdot e^{-rn^2 \cdot \frac{2}{rn^2}} = \frac{4}{r^2n^2}e^{-2}.$$

כלומר

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| \leq \frac{4e^{-2}}{r^2n^2}.$$

הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4e^{-2}}{r^2n^2}$$

מתכנס, ולכן לפי מבחן ויירשטראס הטור הנתון מתכנס בהחלט ובמידה שווה על $\mathbb{R}$.

$\square$

ניצחון

1.3 אינטגרציה וגזירה של סדרות פונקציות ושל טורי פונקציות

כאשר נתונה סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על קטע I, ואנו יודעים כי

$$f_n \twoheadrightarrow f,$$

מתעוררת השאלה האם מותר להעביר את פעולת הגבול דרך פעולות אנליטיות כגון אינטגרציה או גזירה. באופן כללי, התכנסות נקודתית בלבד איננה מספיקה לשם כך. כדי להצדיק מעבר לגבול תחת סימן האינטגרל או תחת סימן הנגזרת, יש צורך בהנחות חזקות יותר. אחת ההנחות המרכזיות בהקשר זה היא התכנסות במידה שווה.

תזכורת (מההרצאה)

אינטגרציה של סדרת פונקציות. נניח כי $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ הן פונקציות אינטגרביליות, וכי

$$f_n \twoheadrightarrow f \qquad \text{on}[a,b].$$

אז גם f אינטגרבילית על $[a,b]$, ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

במילים אחרות, אם סדרת פונקציות מתכנסת במידה שווה על קטע סגור, אז מותר להעביר את הגבול דרך האינטגרל:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

תזכורת (מההרצאה)

אינטגרציה של טור פונקציות. נניח כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

הוא טור פונקציות על $[a,b]$, וכל u_n אינטגרבילית על $[a,b]$. אם הטור מתכנס במידה שווה על $[a,b]$ לפונקציה S, כלומר

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

אז מותר לבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

תוצאה זו מתקבלת מתוך המשפט על אינטגרציה של סדרות פונקציות, כאשר מתבוננים בסדרת הסכומים החלקיים

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x).$$

אם $S_N \twoheadrightarrow S$, אז מותר להעביר את הגבול תחת סימן האינטגרל.

תזכורת (מההרצאה)

גזירה של סדרת פונקציות. ביחס לגזירה, המצב עדין יותר מאשר באינטגרציה. עצם העובדה ש-

$f_n \twoheadrightarrow f$ איננה מספיקה בדרך כלל כדי להסיק כי

$$f_n'(x) \to f'(x),$$

או כי מותר לגזור איבר איבר.
המשפט היסודי בהקשר זה הוא הבא:
נניח כי לכל n, הפונקציה f_n גזירה על $[a,b]$. נניח עוד כי קיימת נקודה $x_0 \in [a,b]$ כך שהסדרה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, וכן שסדרת הנגזרות $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה על $[a,b]$ לפונקציה g.
אז הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה על $[a,b]$ לפונקציה f, והפונקציה f גזירה, ובנוסף מתקיים

$$f'(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

כלומר, כאשר הנגזרות מתכנסות במידה שווה, ויש גם שליטה על ערכי הפונקציות בנקודה אחת, אז מותר להעביר את הגבול דרך פעולת הגזירה.

תזכורת (מההרצאה)

גזירה של טור פונקציות. נניח כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

הוא טור פונקציות, כאשר כל u_n גזירה על $[a,b]$. כדי להצדיק גזירה איבר איבר, אין די בכך שהטור עצמו יתכנס. יש לבחון את טור הנגזרות

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

אם טור הנגזרות מתכנס במידה שווה על $[a,b]$, ואם קיים $x_0 \in [a,b]$ שעבורו הטור המספרי

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

מתכנס, אז טור הפונקציות המקורי מתכנס במידה שווה על $[a,b]$ לפונקציה S, ומותר לגזור איבר איבר:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

זהו אחד המשפטים המרכזיים בתורת טורי הפונקציות, ובפרט הוא עומד בבסיס התיאוריה של טורי חזקות.

דוגמה 1.3.1.

עבור $x \in [0,1]$ נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

הוכיחו כי הטור מתכנס במידה שווה על $[0,1]$, והסיקו שמותר לבצע אינטגרציה איבר איבר. חשבו את

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} dx.$$

פתרון.
נסמן

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

לכל $x \in [0,1]$ מתקיים

$$|u_n(x)| = \frac{x^n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

כעת הטור המספרי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

מתכנס, כי זהו טור טלסקופי לאחר פירוק:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

לכן ממבחן ויירשטראס הטור מתכנס במידה שווה על $[0,1]$.
כל איבר רציף על $[0,1]$, ולכן מותר לבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n(n+1)} dx.$$

נחשב כל איבר בנפרד:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{n(n+1)} dx = \frac{1}{n(n+1)} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

לכן

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

זהו ביטוי סופי ונכון, וגם אם לא מפשטים יותר הוא כבר תשובה מלאה לחלוטין.

תרגיל 1.3.2.

הוכיחו שטור הפונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{2}-\sqrt{n}\,x^2}$$

מגדיר פונקציה גזירה בכל נקודה ב-$\mathbb{R}$.

פתרון.
נגדיר לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{2}-\sqrt{n}\,x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

נרצה להפעיל את משפט הגזירה איבר איבר של טורי פונקציות.
לשם כך נבדוק שלושה דברים:

1. כל f_n גזירה על $\mathbb{R}$.
2. קיים $x_0 \in \mathbb{R}$ כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ מתכנס.
3. טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ מתכנס במידה שווה.

א. כל אחת מן הפונקציות f_n גזירה לכל n, הפונקציה

$$x \mapsto \frac{1}{2} - \sqrt{n}\,x^2$$

היא פולינום כפול קבוע, ולכן היא גזירה על $\mathbb{R}$. הפונקציה האקספוננציאלית גזירה על $\mathbb{R}$, ולכן גם ההרכבה

$$x \mapsto e^{\frac{1}{2}-\sqrt{n}\,x^2}$$

גזירה על $\mathbb{R}$. מכאן שגם f_n גזירה על $\mathbb{R}$.
נגזור:

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{2}-\sqrt{n}\,x^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{n}\,x^2\right) = \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{2}-\sqrt{n}\,x^2} \cdot (-2\sqrt{n}\,x).$$

לכן

$$f_n'(x) = -\frac{2x}{n^{3/2}} e^{\frac{1}{2}-\sqrt{n}\,x^2}.$$

ב. התכנסות הטור בנקודה אחת נבחר $x_0 = 0$. אז

$$f_n(0) = \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{2}}.$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = e^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

מתכנס, ולכן גם
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)$$
מתכנס.

ג. התכנסות במידה שווה של טור הנגזרות נחפש חסם אחיד עבור $|f_n'(x)|$.
מתקיים
$$|f_n'(x)|= \frac{2|x|}{n^{3/2}} e^{\frac{1}{2}-\sqrt{n}\,x^2} = \frac{2e^{1/2}}{n^{3/2}}\,|x|e^{-\sqrt{n}\,x^2}.$$
כעת נגדיר עבור $x \geq 0$:
$$g_n(x) = xe^{-\sqrt{n}\,x^2}.$$
מאחר שהביטוי תלוי ב-$|x|$, די למצוא חסם ל-g_n עבור $x \geq 0$.
נגזור:
$$g_n'(x) = e^{-\sqrt{n}\,x^2} + x \cdot e^{-\sqrt{n}\,x^2} \cdot (-2\sqrt{n}\,x) = e^{-\sqrt{n}\,x^2}\left(1 - 2\sqrt{n}\,x^2\right).$$
לכן נקודת הקיצון מתקבלת כאשר
$$1 - 2\sqrt{n}\,x^2 = 0,$$
כלומר
$$x^2 = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{1/4}}.$$
נציב:
$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n^{1/4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{1/4}} \exp\left(-\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}\,n^{1/4}}.$$
לכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים
$$|x|e^{-\sqrt{n}\,x^2} \leq \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}\,n^{1/4}}.$$
ומכאן
$$|f_n'(x)|\leq \frac{2e^{1/2}}{n^{3/2}} \cdot \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}\,n^{1/4}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{7/4}}.$$
אם כן, נגדיר
$$M_n = \frac{\sqrt{2}}{n^{7/4}}.$$
אז לכל $x \in \mathbb{R}$,
$$|f_n'(x)|\leq M_n,$$
והטור המספרי
$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/4}}$$
מתכנס, משום שזהו טור p עם $p = \frac{7}{4} > 1$.
לכן, לפי מבחן M של ויירשטראס, טור הנגזרות
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

מתכנס במידה שווה על $\mathbb{R}$.
ד. מסקנה קיבלנו כי:

1. כל f_n גזירה על $\mathbb{R}$,
2. הטור $\sum f_n(0)$ מתכנס,
3. טור הנגזרות $\sum f_n'(x)$ מתכנס במידה שווה על $\mathbb{R}$.

לכן, לפי משפט הגזירה איבר איבר של טורי פונקציות, הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{2}-\sqrt{n}\,x^2}$$

מתכנס לפונקציה F הגזירה בכל $x \in \mathbb{R}$, ומותר לגזור איבר איבר:

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2x}{n^{3/2}} e^{\frac{1}{2}-\sqrt{n}\,x^2} \right).$$

הערה: למה זה בסדר שהמסקנה היא על כל $\mathbb{R}$, למרות שבדרך כלל המשפט נלמד על קטע סגור וחסום

זו שאלה מצוינת.
בדרך כלל המשפט מנוסח על קטע סגור וחסום $[a,b]$. אבל כאן אין בעיה, משום שאפשר לעבוד *מקומית* על כל קטע סגור וחסום $[-R,R]$, כאשר $R>0$.
אכן, לכל $R>0$:

1. כל f_n גזירה על $[-R,R]$.
2. הטור $\sum f_n(0)$ מתכנס.
3. טור הנגזרות מתכנס במידה שווה על כל $\mathbb{R}$, ולכן בפרט גם על $[-R,R]$.

לכן על כל קטע $[-R,R]$ מותר להפעיל את המשפט, ומסקנתו היא שפונקציית הסכום גזירה על $[-R,R]$.
כעת יהא $x \in \mathbb{R}$ כלשהו. נבחר $R > |x|$. אז $x \in [-R,R]$, וכבר הוכחנו שפונקציית הסכום גזירה על קטע זה, ולכן היא גזירה גם בנקודה x.
מאחר שהנקודה x הייתה שרירותית, נקבל שפונקציית הסכום גזירה בכל $\mathbb{R}$.
כלומר, לא מפעילים את המשפט "במכה אחת" על כל $\mathbb{R}$ כאילו הייתה קטע סגור, אלא מפעילים אותו על כל קטע סגור וחסום בנפרד, ואז מסיקים גזירות בכל נקודה ממשית.

$\square$

ניצחון

תרגיל 1.3.3.

תהי סדרת הפונקציות

$$f_n(x)=\int_0^x \frac{\sin(nt^2)}{n+t}\,dt, \qquad x\in[0,1].$$

הוכיחו כי $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה על $[0,1]$, באמצעות משפט הגזירה של סדרות פונקציות.

פתרון.
נוכיח כי $f_n \rightrightarrows 0$ על $[0,1]$, ונעשה זאת דרך סדרת הנגזרות.

1. **הערה על הרעיון**

   זו דוגמה טובה למצב שבו לא נוח להתחיל ישירות מקריטריון הסופרימום עבור f_n עצמם.
   אכן, הפונקציות f_n נתונות באמצעות אינטגרל

   $$f_n(x)=\int_0^x \frac{\sin(nt^2)}{n+t}\,dt,$$

   ואין כאן קדומה אלמנטרית נוחה שאפשר לכתוב במפורש. לכן אם מנסים להתחיל ישירות מ-

   $$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|,$$

   לא כל כך ברור מיד איפה נמצא המקסימום ומהי הדרך הטבעית לחשב אותו.
   לעומת זאת, המעבר לנגזרות נותן ביטוי פשוט מאוד, ושם מתקבל חסם אחיד מיידי. זו בדיוק הסיטואציה שבה משפט הגזירה של סדרות פונקציות הוא הכלי הטבעי.

2. **גזירות הפונקציות**

   לכל $n\in\mathbb{N}$, הפונקציה

   $$t\mapsto \frac{\sin(nt^2)}{n+t}$$

   רציפה על $[0,1]$, שכן $n+t>0$ לכל $t\in[0,1]$.
   לכן, לפי המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי, f_n גזירה על $[0,1]$, ומתקיים

   $$f_n'(x)=\frac{\sin(nx^2)}{n+x}.$$

3. **התכנסות במידה שווה של סדרת הנגזרות**

   לכל $x\in[0,1]$ מתקיים

   $$|f_n'(x)|=\left|\frac{\sin(nx^2)}{n+x}\right|\le \frac{1}{n+x}\le\frac{1}{n}.$$

   לכן

   $$|f_n'(x)-0|\le\frac{1}{n}\qquad \forall x\in[0,1].$$

ניקח סופרימום על $x \in [0,1]$:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n'(x) - 0| \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

מכאן

$$f_n' \rightrightarrows 0 \qquad \text{on}[0,1].$$

4. **בדיקת התכנסות בנקודה אחת**

כדי להפעיל את משפט הגזירה של סדרות פונקציות, מספיק לבדוק כי קיימת נקודה אחת $x_0 \in [0,1]$ שבה הסדרה $\{f_n(x_0)\}$ מתכנסת.

נבחר $x_0 = 0$. אז לכל n,

$$f_n(0) = \int_0^0 \frac{\sin(nt^2)}{n+t}\, dt = 0.$$

לכן הסדרה $\{f_n(0)\}$ קבועה, ובפרט מתכנסת.

5. **הפעלת המשפט**

כעת מתקיימים כל תנאי המשפט:

(א) כל f_n גזירה על $[0,1]$.

(ב) סדרת הנגזרות $\{f_n'\}$ מתכנסת במידה שווה על $[0,1]$.

(ג) קיימת נקודה $x_0 = 0$ שבה הסדרה $\{f_n(0)\}$ מתכנסת.

לכן קיימת פונקציה f כך ש

$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{on}[0,1],$$

וכן

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0.$$

לכן f היא פונקציה קבועה על $[0,1]$.

כדי לזהות את הקבוע, נציב $x = 0$:

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0.$$

לכן

$$f(x) \equiv 0.$$

מסקנה:

$$f_n \rightrightarrows 0 \qquad \text{on}[0,1].$$

$\square$

ניצחון

תרגיל 1.3.4.

עבור $x\in[0,2]$ נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 3^n}.$$

הוכיחו כי הטור מתכנס במידה שווה על $[0,2]$, והראו שמותר לבצע אינטגרציה איבר איבר בקטע זה. לאחר מכן חשבו את

$$\int_0^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 3^n}dx.$$

פתרון.
נסמן

$$u_n(x)=\frac{(x-1)^n}{n^2 3^n}.$$

לכל $x\in[0,2]$ מתקיים

$$|x-1|\leq 1.$$

ולכן

$$|u_n(x)|=\frac{|x-1|^n}{n^2 3^n}\leq\frac{1}{n^2 3^n}.$$

הטור המספרי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}$$

מתכנס, ולכן לפי מבחן ויירשטראס הטור מתכנס במידה שווה על $[0,2]$.
מאחר שכל איבר רציף, מותר לבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_0^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 3^n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}\int_0^2(x-1)^n dx.$$

כעת נחשב את האינטגרל הפנימי. נבצע הצבה

$$t=x-1.$$

כאשר $x=0$, נקבל $t=-1$, וכאשר $x=2$, נקבל $t=1$. לכן

$$\int_0^2(x-1)^n dx=\int_{-1}^1 t^n dt.$$

אם n אי זוגי, האינטגרל שווה 0 כי האינטגרנד אי זוגי על קטע סימטרי. אם $n=2k$ זוגי, אז

$$\int_{-1}^1 t^{2k}dt=2\int_0^1 t^{2k}dt=2\cdot\frac{1}{2k+1}.$$

לכן הסכום הכולל מצטמצם לאיברים הזוגיים:

$$\int_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 3^n} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 3^{2k}} \cdot \frac{2}{2k+1}.$$

כלומר

$$\int_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 3^n} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2(2k+1)3^{2k}}.$$

$\square$

1.4 עוד

תרגיל 1.4.1.

דוגמה. תנו דוגמה לסדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת במידה שווה, אך סדרת הנגזרות $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ איננה מתכנסת במידה שווה.

פתרון.
נגדיר

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

נוכיח תחילה כי $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה ל-0 על $\mathbb{R}$.
לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| \le \frac{1}{n}.$$

לכן

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

מכאן נובע כי

$$f_n \twoheadrightarrow 0 \qquad \text{on} \mathbb{R}.$$

כעת נחשב את הנגזרות:

$$f'_n(x) = \cos(nx).$$

נבחן האם סדרת הנגזרות מתכנסת במידה שווה על $\mathbb{R}$.
נשים לב כי לכל n,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\cos(nx)| = 1.$$

לכן סדרת הנגזרות איננה מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס.

למעשה, אף יותר מכך: הסדרה $\{\cos(nx)\}$ איננה מתכנסת אפילו נקודתית לכל $x \in \mathbb{R}$. למשל, עבור $x = 1$, הסדרה $\{\cos(n)\}$ איננה מתכנסת.
לכן קיבלנו סדרת פונקציות $\{f_n\}$ המתכנסת במידה שווה, בעוד סדרת הנגזרות $\{f_n'\}$ איננה מתכנסת במידה שווה.

$\square$

ניצחון

תרגיל 1.4.2.

נגדיר

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \qquad x \in [-1, 1].$$

1. הוכיחו כי $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה על $[-1, 1]$.
2. חשבו את $f_n'(x)$.
3. הוכיחו כי סדרת הנגזרות $\{f_n'\}$ איננה מתכנסת במידה שווה על $[-1, 1]$.

פתרון.

1. נגדיר

$$f(x) = |x|.$$

לכל $x \in [-1, 1]$,

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{x^2} = |x|.$$

לכן $\{f_n\}$ מתכנסת נקודתית ל-$f(x) = |x|$.
נוכיח כי ההתכנסות היא במידה שווה. לכל $x \in [-1, 1]$,

$$\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| = \frac{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right) - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}.$$

מאחר ש

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x| \geq \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

נקבל

$$\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| \leq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

לכן

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - |x|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

מכאן

$$f_n \twoheadrightarrow |x| \qquad \text{on}[-1,1].$$

2. לכל $x \in [-1,1]$,

$$f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}.$$

3. נבדוק תחילה את הגבול הנקודתי של סדרת הנגזרות.

אם $x > 0$, אז

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

אם $x < 0$, אז

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1.$$

ואם $x = 0$, אז

$$f_n'(0) = 0$$

לכל n.

לכן פונקציית הגבול היא

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

הפונקציה g איננה רציפה ב-$x = 0$.

מאידך גיסא, כל אחת מן הפונקציות f_n' רציפה על $[-1,1]$, שהרי המונה והמכנה רציפים והמכנה לעולם איננו מתאפס.

אילו סדרת הנגזרות $\{f_n'\}$ הייתה מתכנסת במידה שווה על $[-1,1]$, אז לפי המשפט על רציפות גבול אחיד של פונקציות רציפות, פונקציית הגבול g הייתה רציפה על $[-1,1]$. אך הדבר איננו נכון.

לכן סדרת הנגזרות $\{f_n'\}$ איננה מתכנסת במידה שווה על $[-1,1]$.

$\square$

ניצחון

1.4.1 חשיבות גזירה איבר איבר

היתרון הגדול בגזירה איבר איבר הוא שבפועל הרבה פונקציות חשובות בהנדסה מיוצגות באמצעות טורים. דוגמאות אופייניות:

1. **טורי פורייה.** אות מחזורי נכתב בצורה

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

אם מותר לגזור איבר איבר, אז אפשר לנתח נגזרות של האות, קצבי שינוי, קשרים למערכות דיפרנציאליות, והתנהגות של זרם ומתח במודלים מחזוריים.

2. **פתרון משוואות דיפרנציאליות.** הרבה משוואות בפיזיקה והנדסה נפתרות על ידי חיפוש פתרון בצורת טור חזקות:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

אז צריך לגזור איבר איבר:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

בלי הכלי הזה, שיטת טורי החזקות כמעט לא הייתה עובדת.

3. **עיבוד אותות ומערכות.** כאשר מקרבים תגובת מערכת על ידי טור, למשל סביב נקודת עבודה, רוצים לעיתים לגזור כדי להבין רגישות, שיפוע, תגובה רגעית, או יציבות מקומית.

4. **אלקטרומגנטיות ושדות.** בפיתוחים של פתרונות לפוטנציאל, לשדה, או לגלים, מופיעים טורים של פונקציות. גזירה איבר איבר מאפשרת לעבור מן הפוטנציאל לשדה, כי בדרך כלל

$$\vec{E} = -\nabla V.$$

אם V מיוצג כטור, נרצה להצדיק מעבר נגזרת דרך הסכום.

דוגמה יומיומית פשוטה לסטודנט להנדסת חשמל: אם אות מסובך מתואר כסכום הרמוניות, אז גזירה איבר איבר נותנת מיד את קצב השינוי של האות. זה שימושי למשל כשמנתחים זרם חילופין, תגובת מסנן, או מעבר בין אות מיקום לאות מהירות ותאוצה במודל דינמי.

תרגיל 1.4.3.

יהי

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

טור פונקציות המתכנס במידה שווה על קטע I. הוכיחו כי

$$u_n \rightrightarrows 0 \qquad \text{on} I.$$

פתרון.

נסמן את הסכומים החלקיים על ידי

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x).$$

לפי הנתון, הסדרה $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה על I לפונקציה כלשהי S.
כעת לכל $n \geq 2$ מתקיים

$$u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x).$$

לכן

$$|u_n(x)| \leq |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)|.$$

ניקח סופרימום על $x \in I$:

$$\sup_{x\in I}|u_n(x)| \leq \sup_{x\in I}|S_n(x) - S(x)| + \sup_{x\in I}|S_{n-1}(x) - S(x)|.$$

מאחר ש-$S_n \rightrightarrows S$, שני האגפים מימין שואפים לאפס כאשר $n \to \infty$. לכן

$$\sup_{x\in I}|u_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

כלומר,

$$u_n \rightrightarrows 0 \qquad \text{on} I.$$

זהו תנאי הכרחי חשוב מאוד. לכן, כדי להפריך התכנסות במידה שווה של טור פונקציות, לעיתים מספיק להראות שהאיבר הכללי u_n *אינו* שואף לאפס במידה שווה.

$\square$