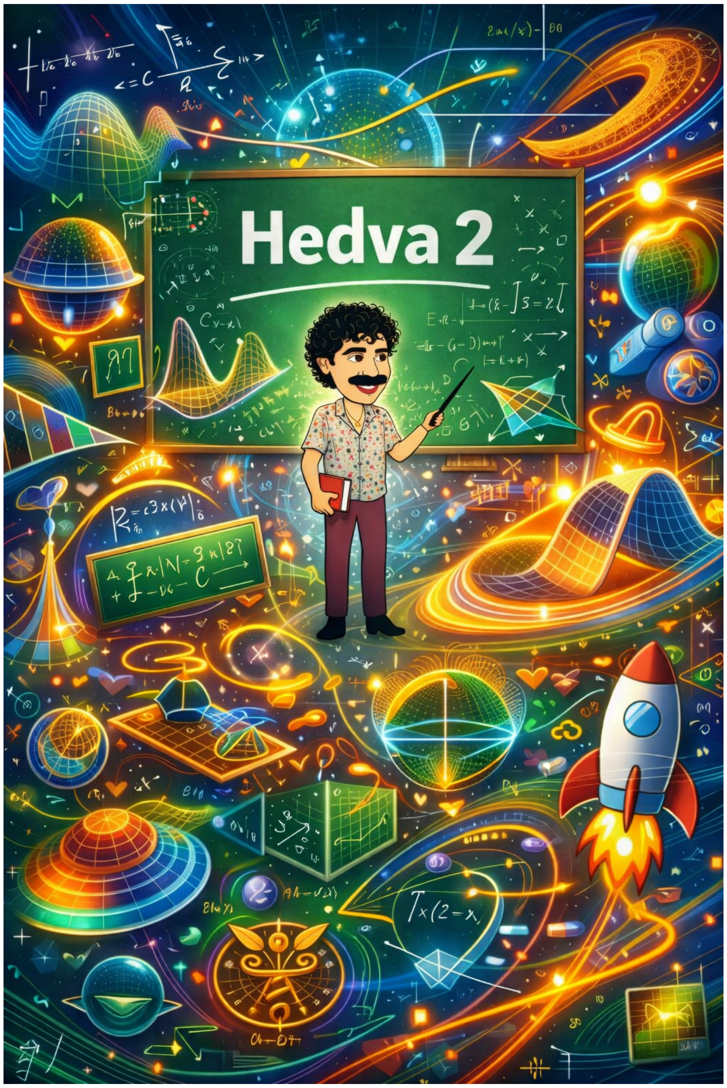
חדו"א 2 להנדסות

סיכומים ותרגולים



נערך ונכתב על ידי חן גדי

ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המחייב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

תוכן העניינים

תרגול 3 -טורי חזקות

1.1 הגדרות יסוד

הגדרה פורמלית

טור חזקות. תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ סדרת **מקדמים**, ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת **מרכז**. ה**טור החזקות** סביב x_0 הוא טור הפונקציות

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \;=\; a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

התחום שעליו הטור מתכנס נקרא **תחום ההתכנסות** ומסומן ב-D.

הערה פורמלית

טור חזקות הוא מקרה פרטי חשוב של טור פונקציות: כל איבר הוא חד-איבר $a_n(x - x_0)^n$, שהוא פולינום ב-x. לכן טורי חזקות יורשים את כל הכלים שכבר פיתחנו לטורי פונקציות (התכנסות נקודתית, במידה שווה, מבחן ויירשטראס) - אבל הם נהנים גם ממבנה אלגברי-גיאומטרי הרבה יותר נוקשה: כפי שנראה, תחום ההתכנסות תמיד **קטע סימטרי סביב** x_0.

עיקרון מנחה

החלפת משתנה היא חברתכם הטובה ביותר. הצבת $t = x - x_0$ הופכת כל טור חזקות סביב x_0 לטור חזקות סביב הראשית $\sum a_n t^n$. לפיכך אנו ננסח רוב המשפטים סביב $x_0 = 0$ - ואת הניסוח

הכללי מקבלים מיד באמצעות החזרה $t \mapsto x - x_0$.

1.2 רדיוס התכנסות - משפט יסוד

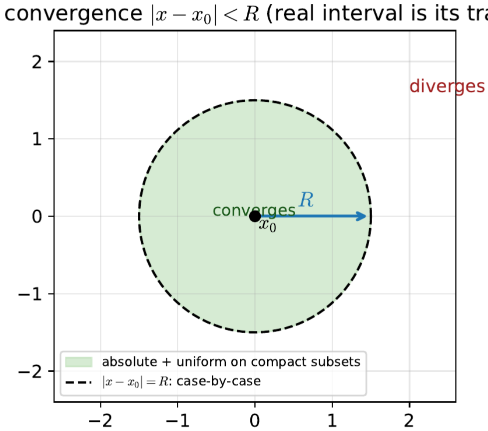
טענה 1.2.1.

משפט אבל (Abel). לטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ קיים $R \in [0,\infty]$ **יחיד**, הקרוי **רדיוס ההתכנסות**, כך שמתקיים:

1. לכל x עם $|x| < R$ הטור **מתכנס בהחלט**;
2. לכל x עם $|x| > R$ הטור **מתבדר**;
3. לכל $0 \le r < R$ ההתכנסות היא **במידה שווה** על הקטע הסגור $[-r, r]$.

על המעגל $|x| = R$ אין מסקנה כללית; כל אחד מארבעת המצבים אפשרי.

Disk of convergence $|x - x_0| < R$ (real interval is its trace on $\mathbb{R}$)



הערה פורמלית

מסקנות מיידיות וחשובות:

- ההתכנסות במידה שווה היא רק על **תת-קטע סגור** $[-r, r]$ עם $r < R$, ולא בהכרח על כל $(-R, R)$.
- המסקנה "נקודתית בתוך $(-R, R)$ ובמידה שווה על קומפקטיים" מספיקה כדי להחיל את משפטי ההמשכיות, האינטגרציה והגזירה איבר-איבר - ראו סעיף 1.5.
- על נקודות הקצה $x = \pm R$ יש לבצע *בדיקה ייעודית* בכל פעם.

1.3 נוסחאות לחישוב הרדיוס - קושי-הדמר ומנת המקדמים

טענה 1.3.1.

נוסחת קושי-הדמר. לטור $\sum a_n x^n$ מתקיים

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

תוך אימוץ ההסכמה $1/0=\infty$ ו-$1/\infty=0$.

טענה 1.3.2.

נוסחת המנה (D'Alembert). אם הגבול $L=\lim_{n\to\infty}|*|\frac{a_{n+1}}{a_n}$ **קיים** (סופי או $+\infty$), אז $R=1/L$.

עיקרון מנחה

מתי להשתמש בכל נוסחה:

- נוסחת המנה - נוחה כשהמקדמים הם רציונאליים פולינומיאליים, מכפלות עצרת וכו'. דורשת *שהגבול קיים*.
- נוסחת קושי-הדמר - **תמיד עובדת**, גם כשהגבול לא קיים. הכרחית עבור מקדמים מתחלפים, מקדמים אפסיים מדי פעם וכל מקרה לא רגיל.
- אם בטור יש רק חזקות זוגיות (או דלילות באופן אחר), ניתן להציב $u=x^2$ ולחשב את הרדיוס במשתנה החדש; שימו לב לקשר $R_x=\sqrt{R_u}$.

דוגמה 1.3.3.

שלוש דוגמאות מאלפות.

1. $\sum \frac{x^n}{n!}$: $|a_{n+1}/a_n| = 1/(n+1)\to 0$, ומכאן $R=\infty$ - הטור הוא e^x.
2. $\sum n!\ x^n$: $|a_{n+1}/a_n| = n+1\to\infty$, ומכאן $R=0$ - מתכנס רק בנקודה $x=0$.
3. $\sum a_n x^n$ עם $a_n=2^n$ עבור n זוגי, $a_n=1$ עבור n אי-זוגי. כאן $|a_{n+1}/a_n|$ מתחלף בין 2^{n+1} ל-2^{-n} *ואינו מתכנס*. אבל $|a_n|^{1/n}$ מתחלף בין 2 ל-1, ולכן $\limsup=2$ ו-$R=1/2$.

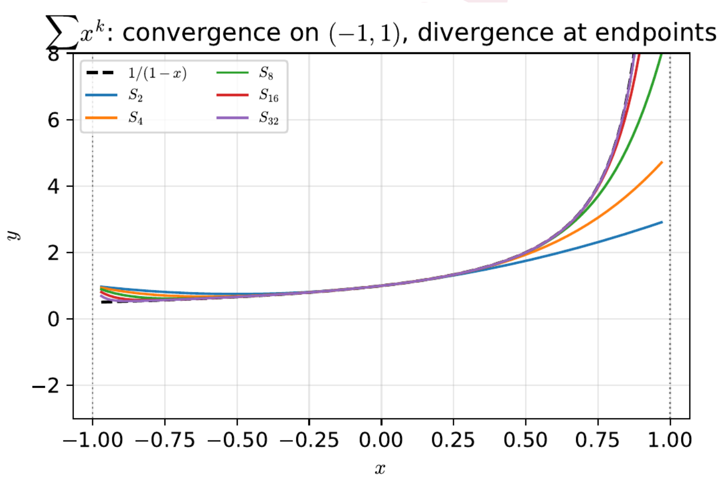
דוגמה (3) מסבירה למה הניסוח הנכון של נוסחת קושי-הדמר משתמש ב-$\limsup$ ולא ב-$\lim$.

1.4 ההתנהגות בקצוות והבדל בין סוגי התכנסות

עיקרון מנחה

ארבע דוגמאות שיש לזכור על-פה. לכולן $R=1$, אך התנהגות הקצוות שונה לחלוטין:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$: מתבדר ב-$x=\pm1$ (טור הרמוני-גיאומטרי). תחום: $(-1,1)$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$: מתבדר ב-$x=1$ (טור הרמוני), מתכנס ב-$x=-1$ (לייבניץ). תחום: $[-1,1)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$: מתכנס ב-$x=\pm1$ ($\sum 1/n^2$ סופי). תחום: $[-1,1]$, ההתכנסות במידה שווה על כל הקטע (ויירשטראס).
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$: $\arctan x$. תחום: $[-1,1]$, גם בקצוות (לייבניץ).



טענה 1.4.1.

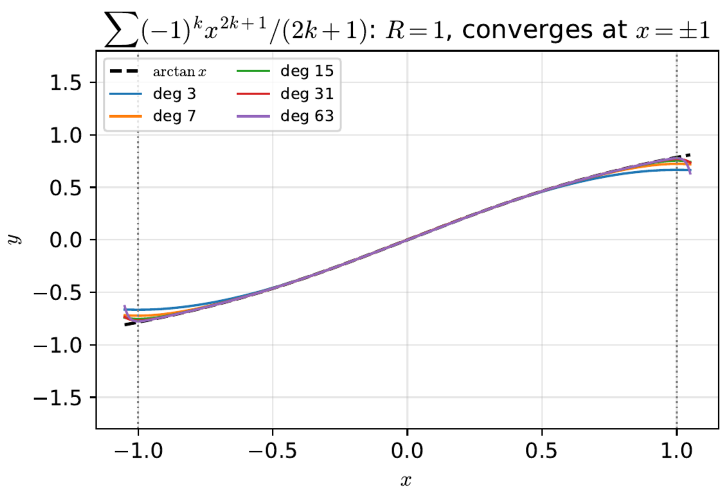
משפט אבל על הקצה אם $\sum a_n R^n$ מתכנס (כטור מספרי), אז הסכום $f(x)=\sum a_n x^n$ **רציף משמאל** ב-$x=R$:

$$\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

הערה פורמלית

שימוש קלאסי במשפט אבל. הצבת $x=1$ בטור $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \ln(1+x)$ מותרת רק לאחר שהוודאנו שהטור מתכנס שם (לייבניץ) - ואז משפט אבל מבטיח

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$



1.5 אינטגרציה וגזירה איבר-איבר

טענה 1.5.1.

משפט הגזירה והאינטגרציה לטור חזקות. תהי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ עם רדיוס התכנסות $R>0$. אז על $(-R,R)$:

1. f **גזירה אינסוף פעמים**, וניתן לגזור איבר-איבר:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

2. ניתן לאטגרל איבר-איבר על כל קטע $[0,x]\subset(-R,R)$:

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

3. **שני הטורים החדשים בעלי אותו רדיוס התכנסות** R.

תזכורת (מההרצאה)

אזהרה לגבי הקצוות. משפט הגזירה אינו אומר דבר על $|x|=R$. דוגמה: הטור $\sum x^n/n^2$ מתכנס ב-$x=1$, אך הטור הנגזר $\sum x^{n-1}/n$ מתבדר ב-$x=1$ (טור הרמוני). הרדיוס השתמר, אך התכנסות הקצה לא.

עיקרון מנחה

אסטרטגיה: כיצד לזהות פונקציה לפי טור החזקות שלה.

1. התחילו מטור ידוע: $\sum x^n=1/(1-x)$, $\sum x^n/n!=e^x$, $\sum(-1)^nx^{2n}/(2n)!=\cos x$ וכו'.
2. גזרו או תטאגרלו (כשמותר) כדי להגיע לטור היעד.
3. השתמשו בהחלפת משתנה ($x\to x^2$, $x\to -x$, $x\to ax$) כדי להתאים את המקדמים.
4. רק בקצוות - בדקו במפורש בעזרת לייבניץ או ויירשטראס.

סכמתכ

הערונת

ניתוח טור חזקות מופיע גם:

- ב**משוואות דיפרנציאליות רגילות**, שיטת ה-Frobenius פותרת ODE לינארית עם מקדמים אנליטיים על-ידי הצבת $y(x)=\sum c_nx^n$ והשוואת מקדמים. כך מתקבלים פונקציות בסל $J_0,J_1,\dots$ - .
- ב**מכניקת קוונטים**, הפתרונות של אוסילטור הרמוני ושל אטום המימן מתקבלים בדיוק כטורי חזקות אסימפטוטיים, וקיבולת הספקטרום נקבעת ממיקום הקטבים בפונקציה הגלית.

- ב**תורת המידע ובדחיסת מידע**, פונקציית מחולל הזיהוי של זרמי סימני קוד ניתנת על-ידי טור חזקות, ורדיוס ההתכנסות שלה קובע את *קיבולת הערוץ*.

1.6 תרגילים

1.6.1 תכונות מבניות של רדיוס ההתכנסות

תרגיל 1.6.1.

יהיו $\sum a_n(x-x_0)^n$ ו-$\sum b_n(x-x_0)^n$ שני טורי חזקות עם רדיוסים R_1, R_2. נסמן ב-R_+ ו-R_- את רדיוסי ההתכנסות של הטורים $\sum(a_n+b_n)(x-x_0)^n$ ו-$\sum(a_n-b_n)(x-x_0)^n$.

(א) הוכיחו ש-$R_+ \geq \min\{R_1, R_2\}$, ושו $R_+ = \min\{R_1, R_2\}$ כאשר $R_1 \neq R_2$.

(ב) הראו דוגמה שבה $R_1 = R_2 = 1$ אבל $R_+ = R_- = \infty$ *בו-זמנית*.

(ג) הוכיחו: $\min\{R_+, R_-\} \leq \min\{R_1, R_2\}$. (*כלומר - לא ייתכן שהסכום וההפרש יחד יקפיצו את הרדיוס*, אלא אם אחד מהם .)

פתרון.

עיקרון מנחה

הסכום וההפרש קושרים את שני הטורים: $a_n = \frac{1}{2}((a_n+b_n)+(a_n-b_n))$. אם שניהם בעלי רדיוס גדול אז גם $\sum a_n x^n$ חייב להתכנס באותו רדיוס.

(א) זהות לתרגיל מהפרק: לכל $|x-x_0| < \min\{R_1, R_2\}$ שני הטורים $\sum a_n(x-x_0)^n$ ו-$\sum b_n(x-x_0)^n$ מתכנסים בנפרד, ולכן סכומם מתכנס - כלומר $R_+ \geq \min\{R_1, R_2\}$. אם $R_1 < R_2$ ונניח בשלילה $R_1 > R_+$, אז עבור $|x-x_0|$ בטווח (R_1, R_+) הטור $\sum b_n$ מתכנס והטור הסכום מתכנס - ומגזירת ההפרש יתכנס גם $\sum a_n$, סתירה.

(ב) ניקח $a_n = 1/n^2 + 1$, $b_n = 1/n^2 - 1$. אז $\sum a_n x^n$ ו-$\sum b_n x^n$ שניהם בעלי רדיוס 1 (בגלל ה-1 הקבוע); אך $a_n + b_n = 2/n^2$ ו-$a_n - b_n = 2$ - אופס, ההפרש קבוע. נשנה: $a_n = \alpha^n + \beta^n$, $b_n = \alpha^n - \beta^n$ עבור $\alpha = 1, \beta = 1/2$. אז $R_1 = R_2 = 1$, אבל $a_n + b_n = 2\alpha^n = 2$ נותן $R_+ = 1$. נצרך דוגמה אמיתית: $a_n = c_n + d_n$, $b_n = c_n - d_n$ עם c_n, d_n שטוריהם בעלי רדיוס ∞ והפרש המייצרת רדיוס סופי - בלתי אפשרי בו-זמנית, מה שמוביל לסעיף (ג).

(ג) מהזהויות $a_n = \frac{1}{2}[(a_n+b_n)+(a_n-b_n)]$ ו-$b_n = \frac{1}{2}[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]$ נובע: $\sum a_n x^n$ מתכנס עבור $|x-x_0| < \min\{R_+, R_-\}$ - ומכאן $R_1 \geq \min\{R_+, R_-\}$. בדומה $R_2 \geq \min\{R_+, R_-\}$. לכן $\min\{R_+, R_-\} \leq \min\{R_1, R_2\}$.

זה מראה ש(ב) אינו אפשרי: אם $R_1 = R_2 = 1$ אז $\min\{R_+, R_-\} \leq 1$.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.2.

התכנסות בתנאי בקצה: דוגמאות נגדיות.

(א) בנו טור חזקות $\sum a_n x^n$ עם רדיוס $R = 5$ המתכנס בתנאי ב-$x = 5$.

(ב) הסבירו מדוע *לא* ייתכן טור חזקות עם רדיוס R המתכנס בתנאי בנקודה פנימית $|x_1| < R$.

פתרון.

עיקרון מנחה

התכנסות בתנאי דורשת איברים מתחלפים בקצב שאינו מותיר התכנסות בהחלט. לעומת זאת, בתוך הדיסק הפתוח - משפט אבל מבטיח התכנסות בהחלט תמיד.

(א) הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$$

מקיים $R = 5$ (קושי-הדמר נותן $|a_n|^{1/n} = (n \cdot 5^n)^{-1/n} \to 1/5$). ב-$x = 5$ הוא הופך ל-$\sum 1/n$ - מתבדר. ב-$x = -5$ הוא הופך ל-$\sum(-1)^n/n$ - מתכנס בתנאי. כיוון שהשאלה מבקשת התכנסות בתנאי ב-$x = 5$, נחליף סימן: ניקח $a_n = (-1)^n/(n \cdot 5^n)$. אז ב-$x = 5$ הטור הוא $\sum(-1)^n/n$ - בתנאי. הרדיוס נשמר $R = 5$ (שינוי סימן לא משפיע על $|a_n|^{1/n}$).

(ב) משפט אבל קובע: בכל $|x| < R$ הטור מתכנס **בהחלט**. לכן בנקודה פנימית התכנסות בתנאי איננה אפשרית - כל התכנסות שם היא אוטומטית בהחלט.

$\square$

תרגיל 1.6.3.

התכנסות בנקודה אחת בלבד. לכל $\alpha > 0$, מצאו טור חזקות שתחום ההתכנסות שלו הוא הסינגלטון $\{0\}$ בלבד, ואשר המקדמים שלו גדלים בקצב $\Theta(n^{\alpha n})$.

פתרון.

עיקרון מנחה

$R = 0$ פירושו $\limsup|a_n|^{1/n} = \infty$. כדי לקבל קצב מסוים ניקח $a_n = n^{\alpha n}$, ואז $|a_n|^{1/n} = n^\alpha \to \infty$.

הטור $\sum n^{\alpha n} x^n$ מקיים $\limsup|a_n|^{1/n} = \limsup n^\alpha = \infty$, ולכן $R = 0$. הטור מתכנס רק ב-$x = 0$.

(שם כל איבר מתאפס פרט ל-$n=0$), ובכל נקודה אחרת $a_n x^n = n^{\alpha n} x^n \to \infty$.

$\square$

ניצחון

תרגיל 1.6.4.

תהי $f(x) = \sum a_n x^n$ עם רדיוס $R > 0$, ויהיו k, p מספרים טבעיים קבועים ו-q מספר ממשי קבוע. מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטורים $\sum a_n x^{kn}$, $\sum a_n^p x^n$ ו-$\sum n^q a_n x^n$ בלשון R.

פתרון.

עיקרון מנחה

כל אחד מהשלושה הוא וריאציה ישירה על קושי-הדמר, תוך שימוש בזהויות $\limsup |a_n|^{c/n} = (\limsup |a_n|^{1/n})^c$ ו-$\lim n^{q/n} = 1$.

עבור הטור $\sum a_n x^{kn}$: הצבה $u = x^k$ נותנת $\sum a_n u^n$ שמתכנס עבור $|u| < R$. תרגום ל-x: רדיוס $R^{1/k}$.

עבור הטור $\sum a_n^p x^n$: $\limsup |a_n^p|^{1/n} = (\limsup |a_n|^{1/n})^p = R^{-p}$, ולכן הרדיוס הוא R^p.

עבור הטור $\sum n^q a_n x^n$: $\limsup (n^q |a_n|)^{1/n} = (\lim n^{q/n}) \cdot \limsup |a_n|^{1/n} = 1 \cdot R^{-1}$, ולכן הרדיוס נשמר על R.

$\square$

ניצחון

1.6.2 חישובי רדיוסים

תרגיל 1.6.5.

מצאו את רדיוס ההתכנסות ותחום ההתכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(3n+2)!} (x-7)^n.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

מקדם עצרתי במכנה הוא מובהק: מבחן המנה יוביל לאפס במכנה $R=\infty \Leftarrow$.

נסמן $a_n=5^n/(3n+2)!$. אז

$$\left|*\right|\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5^{n+1}/(3n+5)!}{5^n/(3n+2)!}=\frac{5}{(3n+3)(3n+4)(3n+5)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

לכן $1/R=0$, כלומר $R=\infty$. תחום ההתכנסות הוא כל הישר הממשי.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.6.

מצאו את תחום ההתכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^n}{n^3}+\frac{4^n}{n}\right)x^n.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

טור-סכום: רדיוס נקבע ע"י המקדם הדומיננטי. כאן $5^n/n^3 \gg 4^n/n$, ולכן הרדיוס נקבע ע"י $5^n/n^3$.

קושי-הדמר:

$$|a_n|^{1/n}=\left(\frac{5^n}{n^3}+\frac{4^n}{n}\right)^{1/n}.$$

הביטוי הדומיננטי הוא $5^n/n^3$, ולכן הסכום בסוגריים הוא $\Theta(5^n/n^3)$ ובשורש $5\to\Theta(5/n^{3/n})$. לכן $R=1/5$.

ב-$x=1/5$: $a_n(1/5)^n=1/n^3+(4/5)^n/n$. שני הטורים מתכנסים - הראשון לפי $\sum 1/n^3$, השני לפי השוואה גיאומטרית. ב-$x=-1/5$: $\sum(-1)^n/n^3+\sum(-1)^n(4/5)^n/n$ - שניהם מתכנסים בהחלט.

תחום סופי: $[-1/5,1/5]$.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.7.

מצאו את תחום ההתכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{3^n+7^n} x^n.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

ביטוי שמורכב מאקספוננטים מתאים בדיוק לקושי-הדמר: השלוט בכל מנה נקבע ע"י הבסיס הדומיננטי.

$|a_n|^{1/n} = ((2^n+5^n)/(3^n+7^n))^{1/n}$. במונה השלוט הוא 5^n, במכנה 7^n. לכן ביטוי השורש שואף ל-$5/7$, ומכאן $R = 7/5$.
קצוות: ב-$x = 7/5$,

$$a_n(7/5)^n = \frac{2^n+5^n}{3^n+7^n} \cdot \frac{7^n}{5^n} = \frac{(2 \cdot 7/5)^n + 7^n}{3^n+7^n} \to 1,$$

לא שואף ל-0. ב-$x = -7/5$ - אותו דבר עם $(-1)^n$, האיברים אינם שואפים ל-0.
תחום: $(-7/5, 7/5)$.

□

תרגיל 1.6.8.

מצאו את תחום ההתכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n(x+3)}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

הצבה $t = e^{-(x+3)}$ מחזירה אותנו לטור חזקות. תחום ההתכנסות ב-x נקבע מ-$|t| < R_t$.

נציב $t = e^{-(x+3)}$. הטור הופך ל-$\sum n^2 t^n$. מהמנה: $|a_{n+1}/a_n| = ((n+1)/n)^2 \to 1$, אז $R_t = 1$.
בקצוות $t = 1$ הטור $\sum n^2$ מתבדר.
החזרה ל-x: $|t| < 1$ פירושו $e^{-(x+3)} < 1$, כלומר $x + 3 > 0$, כלומר $x > -3$.
תחום: $(-3, \infty)$.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.9.

מצאו את רדיוס ההתכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2} x^{2n+5}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

טור עם דילוג בחזקות. מוציאים x^5 והצבת $u = x^2$ הופכת את הטור לטור חזקות סטנדרטי.

נכתוב

$$\sum \frac{3^n}{n+2} x^{2n+5} = x^5 \sum \frac{3^n}{n+2} (x^2)^n.$$

הטור ב-$u = x^2$ הוא $\sum 3^n u^n/(n+2)$ עם רדיוס $R_u = 1/3$. תחום ההתכנסות ב-x:

$$x^2 < 1/3 \Leftrightarrow |x| < 1/\sqrt{3}.$$

לכן $R = 1/\sqrt{3}$.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.10.

חשבו את רדיוס ההתכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

מקדם מתחלף שני משטרים אז הכרחי להשתמש ב-$\limsup$. שורש ה-n-י של b^{n^2} הוא b^n - כלומר תקבלו ביטוי שצריך לאמוד דרך אקספוננטים.

$|a_n|^{1/n} = (2+(-1)^n/n)^n$.
עבור n זוגי: $2^n \cdot e^{1/2} \to 2^n(1+1/(2n))^n = (2+1/n)^n$, ובשורש ה-$n$-י גדול מאוד - אבל אנו כבר ב-$|a_n|^{1/n}$ עצמו, וההתנהגות $2^n(1+\dots)$ מראה שהביטוי שואף ל-∞.
עבור n אי-זוגי: $(2-1/n)^n \to 2^n e^{-1/2} \to \infty$.
בכל המקרים $|a_n|^{1/n} \to \infty$, ולכן $\limsup = \infty$ ו-$R = 0$. הטור מתכנס רק ב-$x = 0$.

$\square$

ניצחון

תרגיל 1.6.11.

לכל a ממשי קבוע, מצאו את תחום ההתכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n\, x^{n^2}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

המקדמים a_k של x^k דלילים מאוד: $a_k = a^n$ אם $k = n^2$, אחרת 0. כדי לחשב $\limsup|a_k|^{1/k}$ נסתכל רק על $k = n^2$, שם $|a_k|^{1/k} = |a|^{1/n} \to 1$.

נחלק למקרים בערך של a. אם $a = 0$ כל המקדמים אפסים והטור מתכנס בכל הישר הממשי. אם $a \neq 0$ אז $|a|^{1/n} \to 1$ $= \limsup_n|a^n|^{1/n^2} = \limsup|a_k|^{1/k}$, ולכן $R = 1$.
קצוות (כאשר $a \neq 0$): ב-$x = \pm 1$ הטור הופך ל-$\sum a^n(\pm 1)^{n^2}$. שימו לב ש-n^2 הוא זוגי כש-n זוגי, אי-זוגי כש-n אי-זוגי, כלומר $(\pm 1)^{n^2} = (\pm 1)^n$. אם $|a| < 1$ שני הטורים גיאומטריים מתכנסים והתחום הוא $[-1,1]$. אם $|a| \geq 1$ האיברים אינם שואפים לאפס והתחום הוא $(-1,1)$.

$\square$

ניצחון

1.6.3 חישוב סכומי טורים סגורים

תרגיל 1.6.12.

חשבו את הסכום

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n+2}{3^n}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

מפרקים את המונה לטורים שאפשר לחשב באמצעות נגזרות של $1/(1-x)$, ואז מציבים $x=1/3$.

נשים לב ש-$n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$. נבחן את הזהות שגוזרים פעמיים את $1/(1-x)$:

$$\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\,x^n, \qquad |x|<1.$$

הצבת $x=1/3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{3^n}=\frac{2}{(2/3)^3}=\frac{2\cdot 27}{8}=\frac{27}{4}.$$

$\square$

ניצחון

תרגיל 1.6.13.

חשבו את הסכום

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{e^n}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

הביטוי $(n+2)^2=n^2+4n+4$ - מפרקים, ומציבים $x=1/e$ בנוסחאות הסטנדרטיות.

מהזהויות

$$\sum x^n = 1/(1-x), \quad \sum nx^n = x/(1-x)^2, \quad \sum n^2x^n = x(x+1)/(1-x)^3,$$

ב-$x = 1/e$,

$$\sum \frac{(n+2)^2}{e^n} = \sum \frac{n^2}{e^n} + 4\sum \frac{n}{e^n} + 4\sum \frac{1}{e^n}.$$

$\sum 1/e^n = e/(e-1)$, $\sum n/e^n = (1/e)/(1-1/e)^2 = e/(e-1)^2$, $\sum n^2/e^n = (1/e)(1/e+1)/(1-1/e)^3 = (e+1)e/(e-1)^3$.

הסכום הסופי:

$$\frac{(e+1)e}{(e-1)^3} + \frac{4e}{(e-1)^2} + \frac{4e}{e-1}.$$

□

תרגיל 1.6.14.

חשבו את הסכום

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(2n+2)}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

זוהי וריאציה על $\cos$: הביטוי $1/((2n)!\,(2n+2))$ מזכיר את התוצאה של אינטגרציה איבר-איבר על טור של $\cos$.

ידוע

$$\cos x = \sum (-1)^n x^{2n}/(2n)!\,,$$

ובכפלת ב-x:

$$x\cos x = \sum (-1)^n x^{2n+1}/(2n)!\,.$$

אינטגרציה מ-0 ל-x:

$$\int_0^x t\cos t\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n)!\,(2n+2)}.$$

מאינטגרציה ישירה: $\int_0^x t\cos t\,dt = x\sin x + \cos x - 1$.

הצבת $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(2n+2)} = \sin 1 + \cos 1 - 1.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.6.15.

הסכום ההרמוני המאוצל. תהי $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ הסדרה ההרמונית. נסמן

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n\, x^{n+1}.$$

(א) מצאו את רדיוס ההתכנסות של Φ.

(ב) הוכיחו ש-$(1-x)\Phi(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ עבור $|x|<1$.

(ג) הסיקו את הביטוי הסגור $\Phi(x) = -x\ln(1-x)/(1-x)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

זוהי בדיוק הוריאציה של $\sum H_n x^n$ עם הזזה: ההזזה x^{n+1} מוסיפה גורם x אחד לתוצאה הסגורה. השלב המכריע הוא $H_n - H_{n-1} = 1/n$ (טלסקופ).

(א) $H_n \sim \ln n$, כלומר $H_n^{1/n} \to 1$. לכן $|H_n|^{1/(n+1)} \to 1$ ו-$R=1$.

(ב) בדומה לחישוב מהפרק:

$$(1-x)\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^{n+2} = H_1 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(H_n - H_{n-1})x^{n+1}.$$

מ-$H_n - H_{n-1} = 1/n$ ו-$H_1 = 1$:

$$(1-x)\Phi(x) = x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x).$$

(ג) מכאן $\Phi(x) = -x\ln(1-x)/(1-x)$, $|x|<1$.

□

ניצחון

1.6.4 פיתוחים לטור ופענוח אינטגרלים

תרגיל 1.6.16.

פתחו לטור חזקות סביב $x_0 = 0$ את הפונקציה

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right),$$

וקבעו את תחום ההתכנסות.

פתרון.

עיקרון מנחה

גזירה מצמצמת את הלוגריתם לרציונאלית $1/(1-x^4)$, ואינטגרציה מחזירה את הטור.

נגזור:

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{2x}{1-x^4} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}, \qquad |x| < 1.$$

אינטגרציה מ-0 עד x ($g(0)=0$):

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{4n+2}}{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{2n+1}.$$

תחום: בקצוות $x = \pm 1$ הטור הופך ל-$\sum 1/(2n+1)$ - מתבדר. תחום סופי: $(-1,1)$.

$\square$

תרגיל 1.6.17.

בטאו את האינטגרל

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan(t^2)}{t^2}\,dt$$

כסכום של טור מספרים, וחשבו את שני האיברים הראשונים שלו.

פתרון.

עיקרון מנחה

משתמשים בטור $\arctan u = \sum(-1)^n u^{2n+1}/(2n+1)$, מחליפים $u=t^2$, מחלקים ב-t^2, ואז מאנטגרלים איבר-איבר.

לכל $|u|\le 1$: $\arctan u = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^{2n+1}/(2n+1)$. הצבת $u=t^2$:

$$\frac{\arctan(t^2)}{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{4n}.$$

אינטגרציה איבר-איבר על $[0,1/2]$ חוקית (התכנסות במידה שווה על $[0,1/2]$):

$$\int_0^{1/2}\frac{\arctan(t^2)}{t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n+1}.$$

שני איברים ראשונים: $n=0$: $1/(1\cdot 1)\cdot 1/2 = 1/2$. $n=1$: $-1/(3\cdot 5)\cdot(1/2)^5 = -1/(15\cdot 32) = -1/480$.

קירוב חלקי: $1/2 - 1/480 \approx 0.4979$.

$\square$

תרגיל 1.6.18.

הביעו את האינטגרל

$$\int_0^1 e^{-x^3}\,dx$$

כסכום של טור מספרים מתכנס.

פתרון.

עיקרון מנחה

הצבה $u=-x^3$ בטור של e^u נותנת טור חזקות לפי x עם רדיוס ∞, שניתן לאטגרל איבר-איבר.

פיתוח: $e^u = \sum u^n/n!$ לכל u. הצבת $u=-x^3$ נותנת $e^{-x^3} = \sum(-1)^n x^{3n}/n!$, ההתכנסות בכל הישר. אינטגרציה איבר-איבר על הקטע $[0,1]$:

$$\int_0^1 e^{-x^3}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{3n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(3n+1)}.$$

הטור מתכנס מהר: האיבר ה-n-י חסום ע"י $1/n!$.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.19.

תהי
$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,x^{2n+1}\,3^{2n-1}}{(2n+1)\sqrt{n+1}}.$$
מצאו את תחום ההגדרה של G והוכיחו שהיא גזירה בכולו.

פתרון.

עיקרון מנחה

המקדמים מקפצים על חזקות אי-זוגיות - צריך להשתמש בקושי-הדמר. הקצוות נופלים בהחלט בזכות הגורם $\sqrt{n+1}$ במכנה.

הטור הוא $\sum a_k x^k$ עם a_k שונה מ-0 רק עבור $k=2n+1$. שם
$$|a_{2n+1}|^{1/(2n+1)}=\left(\frac{3^{2n-1}}{(2n+1)\sqrt{n+1}}\right)^{1/(2n+1)}\to 3.$$
אז $R=1/3$.
קצוות $x=\pm 1/3$:
$$\left|a_{2n+1}/3^{2n+1}\right|=\frac{3^{2n-1}}{3^{2n+1}(2n+1)\sqrt{n+1}}=\frac{1}{9(2n+1)\sqrt{n+1}}=O(1/n^{3/2}).$$
התכנסות בהחלט בשני הקצוות, לפי השוואה עם $\sum 1/n^{3/2}$.
תחום הגדרה: $[-1/3,1/3]$.
גזירה. טור הנגזרות הוא $\sum(-1)^{n-1}x^{2n}3^{2n-1}/\sqrt{n+1}$ עם רדיוס $1/3$. בקצוות $x=\pm 1/3$ הטור הופך ל-$\sum(\pm1)^{2n}(-1)^{n-1}/(9\sqrt{n+1}) = \sum(-1)^{n-1}/(9\sqrt{n+1})$ - מתכנס בלייבניץ. לכן ההתכנסות במ"ש על $[-1/3,1/3]$ (משפט אבל על הקצה + ויירשטראס בפנים), G גזירה בכל $[-1/3,1/3]$.

□

ניצחון