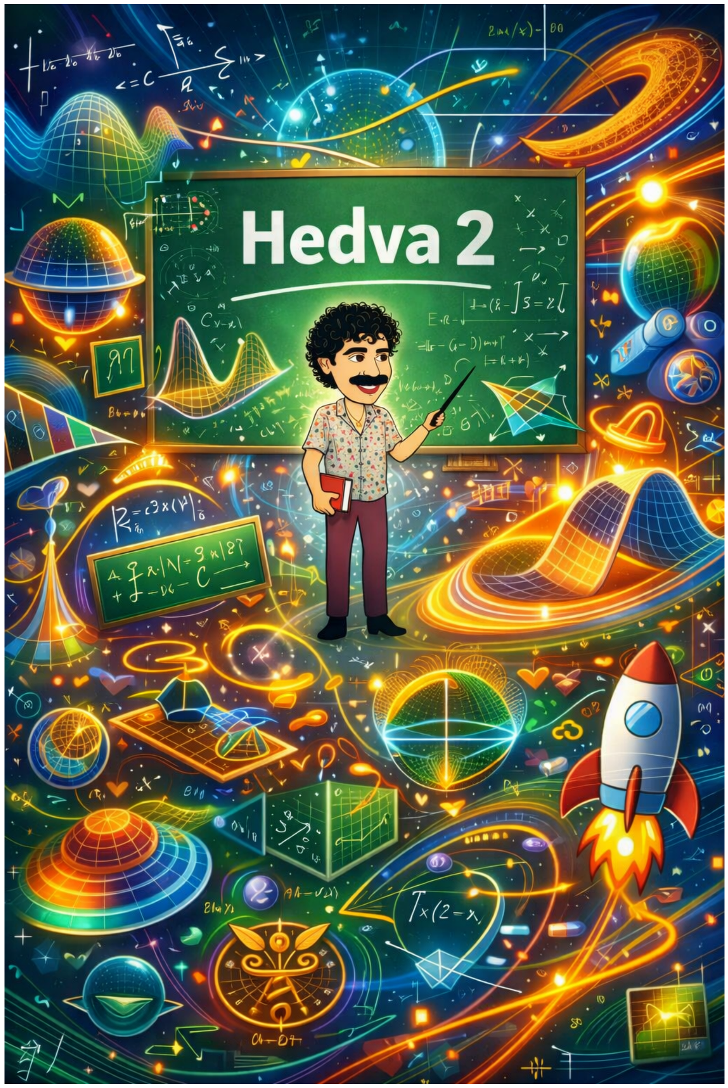
חדו"א 2 להנדסות

סיכומים ותרגולים



נערך ונכתב על ידי חן גדי

ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המחייב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

תוכן העניינים

תרגול 4-וקטורים, מישורים, משטחים, תחום הגדרה, קווי גובה, טופולוגיה וקשירות

1.1 מכפלה פנימית

הגדרה פורמלית

__מכפלה פנימית סטנדרטית.__ לוקטורים $\vec{u},\vec{v}\in\mathbf{R}^n$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i.$$

אורך: $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.
זווית: $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.
ניצבות: $\vec{u}\perp\vec{v}\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

הערה קטנה ומועילה

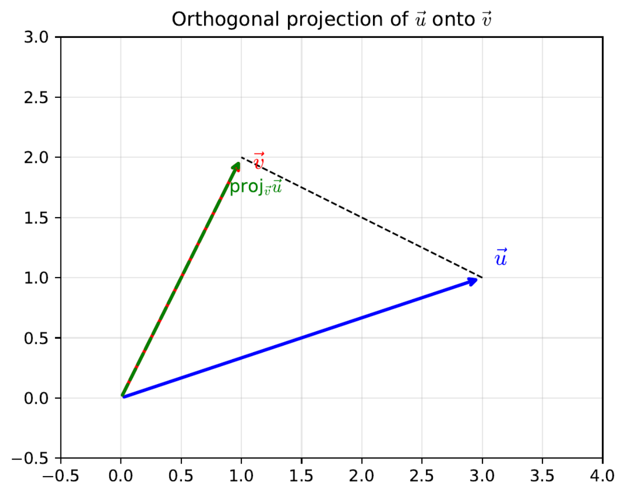
תכונות (מההרצאה): סימטריה $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$; בילינאריות; חיוביות; קושי-שוורץ $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le|\vec{u}||\vec{v}|$; אי-שוויון המשולש $|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$.

הגדרה פורמלית

היטל אורתוגונלי. ההיטל של $\vec{u}$ על כיוון $\vec{v}\neq\vec{0}$:

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}.$$

תכונה אופיינית: $\vec{u}-\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ ניצב ל-$\vec{v}$.



עיקרון מנחה

אסטרטגיה: שימוש בהיטל. כשרוצים לפרק וקטור $\vec{u}$ ל"רכיב לאורך $\vec{v}$" + "רכיב ניצב ל-$\vec{v}$":

$$\vec{u}=\underbrace{\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}}_{\text{מקביל ל-}\vec{v}}+\underbrace{(\vec{u}-\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u})}_{\text{ניצב ל-}\vec{v}}.$$

1.2 מכפלה וקטורית

הגדרה פורמלית

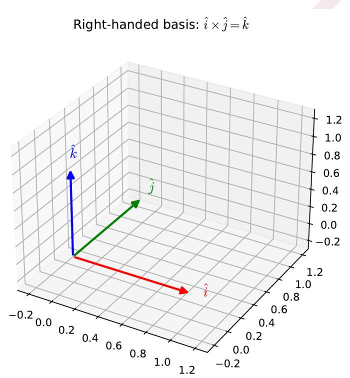
מכפלה וקטורית במרחב התלת-ממדי.

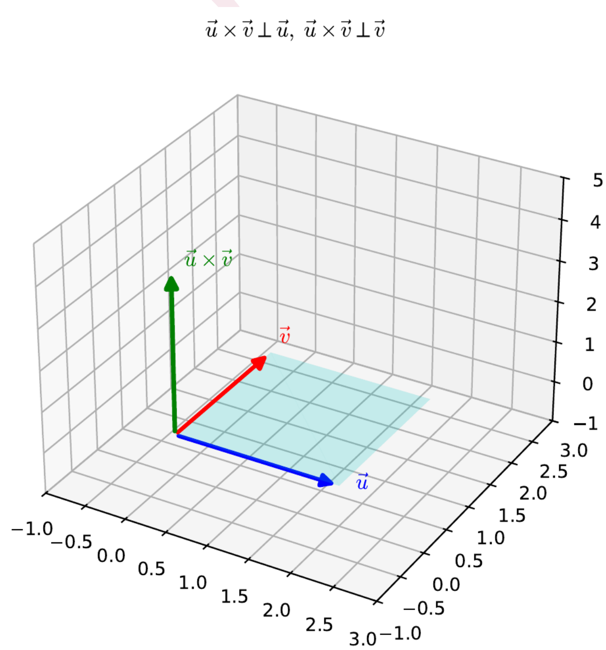
$$\vec{u}\times\vec{v}=\det\begin{pmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{pmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1).$$

הערה קטנה ומועילה

תכונות יסוד (מההרצאה):

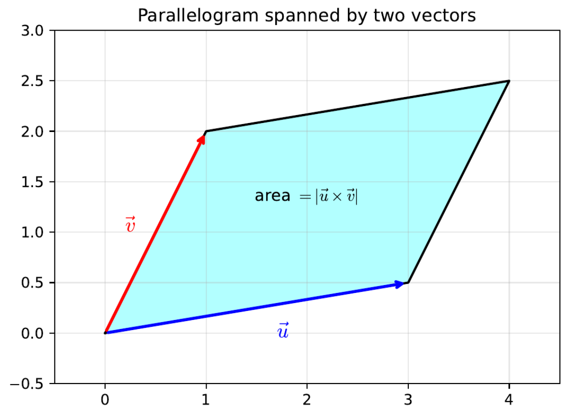
- **ניצבת לשניהם:** $\vec{u} \perp (\vec{u}\times\vec{v})$ ו-$\vec{v} \perp (\vec{u}\times\vec{v})$. זוהי *התכונה המרכזית* - היא הגורם לכך שהמכפלה הוקטורית מועילה לבניית נורמלים למישורים.
- **אנטיסימטריות:** $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.
- **גודל:** $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ - שטח המקבילית הנפרשת.
- **תלות לינארית:** $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \vec{u} \parallel \vec{v}$.
- **זהות לגראנז':** $|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 = (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2$.
- **BAC-CAB:** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
- **מכפלה מעורבת:** $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \det[\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}]$, ערכו המוחלט = נפח המקבילון.





עיקרון מנחה

כלל יד ימין. לוקטורים $\vec{u},\vec{v}$ במרחב, ה-$\vec{u} \times \vec{v}$ מצביעה בכיוון שמסומן ע"י האגודל אם האצבעות מסתובבות מ-$\vec{u}$ אל $\vec{v}$.

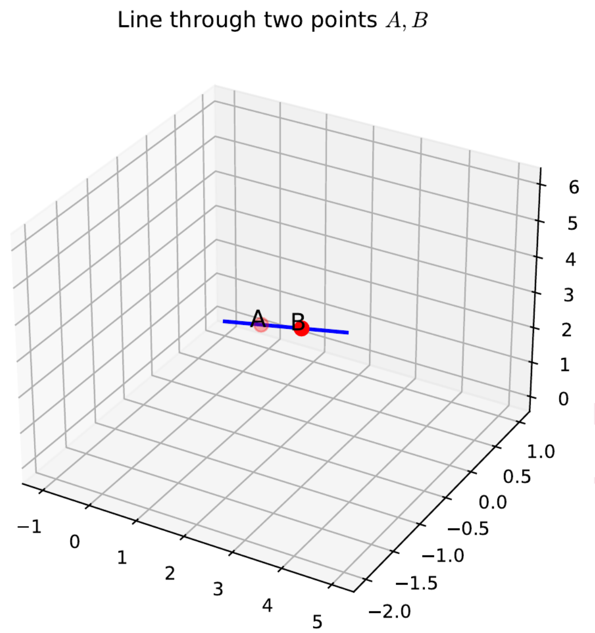


1.3 ישרים במרחב

הגדרה פורמלית

<u>ייצוגי ישר.</u> ישר נקבע ע"י *נקודה* $\vec{p}_0$ ו-*כיוון* $\vec{v}\neq\vec{0}$:

- **פרמטרי:** $\vec{r}(t)=\vec{p}_0+t\vec{v},\ t\in\mathbf{R}$.
- **סימטרי:** $\dfrac{x-x_0}{v_1}=\dfrac{y-y_0}{v_2}=\dfrac{z-z_0}{v_3}$ (כש-$v_i\neq 0$).
- **דרך 2 נקודות** A,B: $\vec{r}(t)=(1-t)A+tB$ (פרמטר $t\in[0,1]$ נותן את הקטע).



הערה קטנה ומועילה

נוסחאות מרחק (מההרצאה):

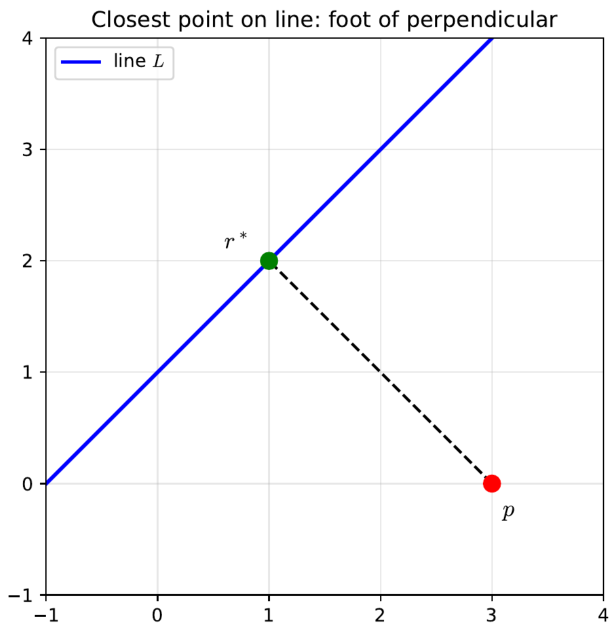
- **נקודה** $\vec{p}$ **לישר** $L = \vec{p}_0 + t\vec{v}$:

$$d(\vec{p}, L) = \frac{|(\vec{p} - \vec{p}_0) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$

- **הנקודה הקרובה ביותר על הישר:**

$$t^* = \frac{(\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \qquad \vec{r}^* = \vec{p}_0 + t^*\vec{v}.$$

זוהי בדיוק $\vec{p}_0 + \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{p} - \vec{p}_0)$ - היטל אורתוגונלי על $\vec{v}$.



עיקרון מנחה

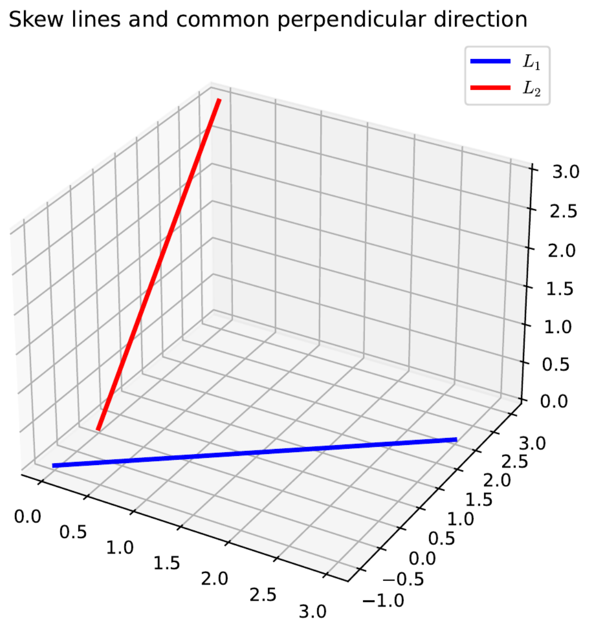
שיטת הגזירה למציאת הנקודה הקרובה. מינימום $f(t) = |\vec{r}(t) - \vec{p}|^2$ (ריבוע המרחק - פולינום ריבועי ב-t, מינימום יחיד). הנגזרת $f'(t) = 0$ נותנת $t^* = (\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \vec{v}/|\vec{v}|^2$, ובדיקה: $(\vec{p} - \vec{r}^*) \perp \vec{v}$ - ההיטל האורתוגונלי.

טענה 1.3.1.

שני ישרים זרים - מרחק מינימלי. לישרים $L_1 = \vec{p}_1 + t\vec{v}_1$, $L_2 = \vec{p}_2 + s\vec{v}_2$ עם $\vec{v}_1 \not\parallel \vec{v}_2$:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}.$$

הוכחה.
מההרצאה: הוקטור $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ ניצב לשני הישרים, וההיטל של $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ על $\vec{n}$ הוא בדיוק המרחק המינימלי. ■



1.4 מישורים

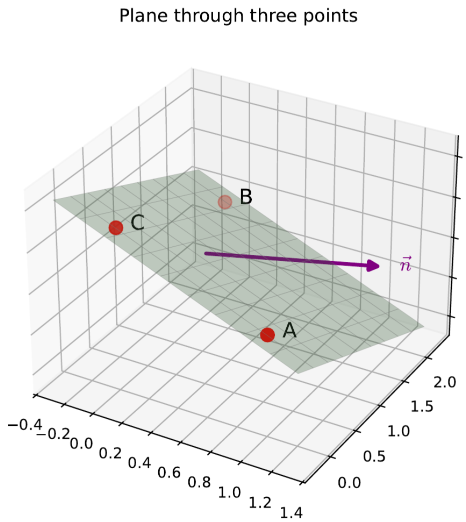
הערה קטנה ומועילה

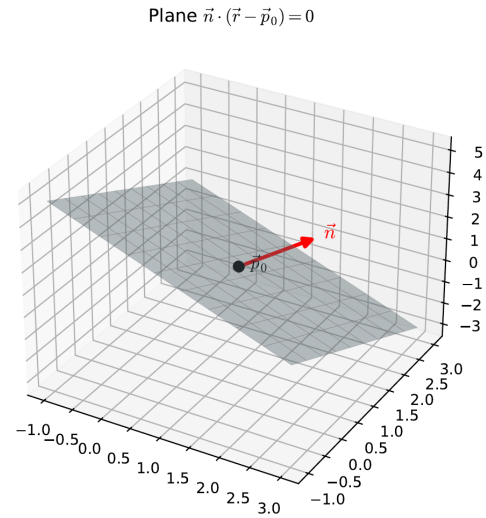
הרעיון: מישור = "ניצב לוקטור". המכפלה הפנימית $\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{p}_0)=0$ אומרת ש-$\vec{r}-\vec{p}_0$ ניצב ל-$\vec{n}$. קבוצת כל הוקטורים הניצבים ל-$\vec{n}$ - היא מישור! ולכן זוהי משוואת המישור העובר דרך $\vec{p}_0$ ובעל וקטור נורמל $\vec{n}$.

הגדרה פורמלית

ייצוגי מישור.

- **נקודה + נורמל:** $\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{p}_0)=0$, או $ax+by+cz=d$ עם $\vec{n}=(a,b,c)$.
- **3 נקודות** A,B,C **(לא קוליניאריות):** $\vec{n}=AB\times AC$, ואז $\vec{n}\cdot(\vec{r}-A)=0$.
- **2 נקודות + כיוון** $\vec{u}$: $\vec{n}=AB\times\vec{u}$.
- **2 וקטורי כיוון** $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ **בלתי-תלויים, ונקודה** $\vec{p}_0$: $\vec{n}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2$.





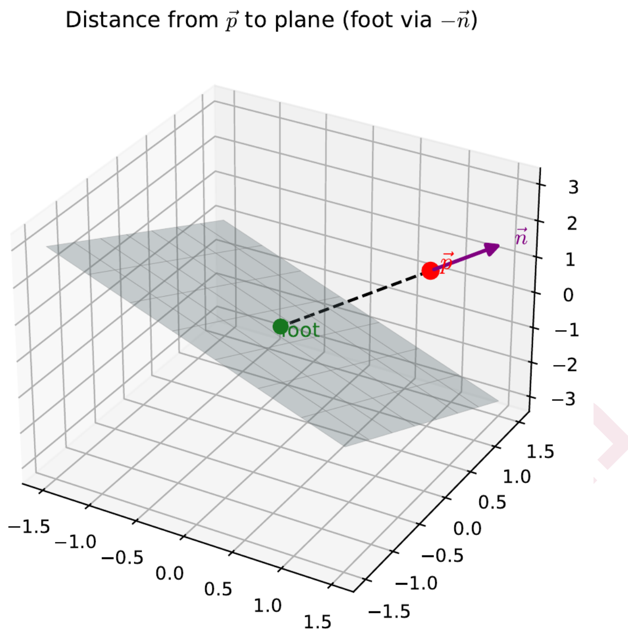
הערה קטנה ומועילה

מרחק מנקודה למישור (מההרצאה):

$$d(\vec{p},\pi)=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}-d|}{|\vec{n}|}.$$

אינטרפרטציה גיאומטרית: זהו ההיטל של $\vec{p}-\vec{p}_0$ על $\vec{n}$. ה"רגל הניצב" של $\vec{p}$ על המישור היא

$$\vec{p}^{*}=\vec{p}-\frac{\vec{n}\cdot\vec{p}-d}{|\vec{n}|^{2}}\vec{n}.$$



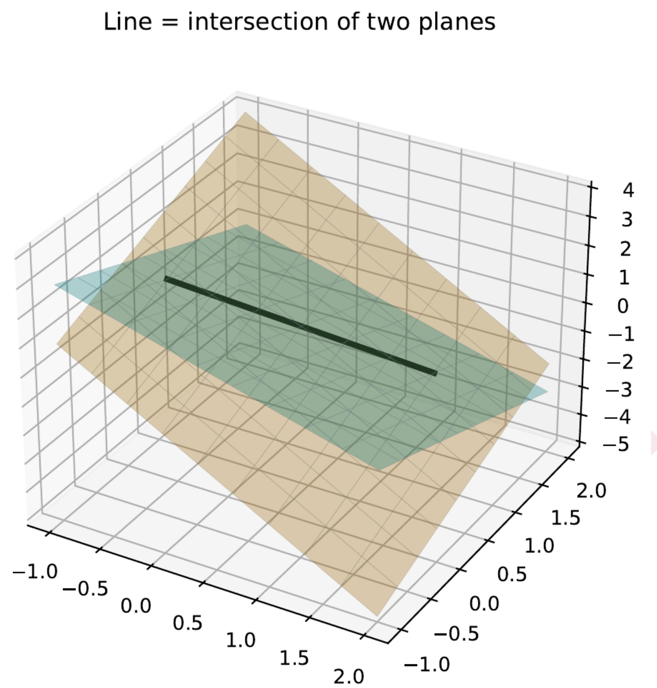
טענה 1.4.1.

ישר חיתוך של שני מישורים. $\pi_1 : \vec{n}_1 \cdot \vec{r} = d_1$ ו-$\pi_2 : \vec{n}_2 \cdot \vec{r} = d_2$ עם $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$. החיתוך הוא ישר עם

כיוון: $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$,   נקודה: .

הוכחה.

הצדקה: ישר החיתוך מוכל בשני המישורים, ולכן הכיוון שלו ניצב ל-$\vec{n}_1$ ו-ל-$\vec{n}_2$ - כלומר במכפלה הוקטורית שלהם. נקודה - כל פתרון של המערכת הלינארית $\vec{n}_1 \cdot \vec{r} = d_1, \vec{n}_2 \cdot \vec{r} = d_2$ (קיים כי $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ בלתי-תלויות). ■



עיקרון מנחה

אסטרטגיה למציאת נקודה משותפת לשני מישורים.

1. שאלו "מהי הקואורדינטה הכי קלה להגדיר?" - בדרך כלל $z=0$ או $x=0$.
2. הציבו את הערך הזה והפכו את המערכת לשתי משוואות בשני נעלמים - פתירה ע"י חיסור או כלל קרמר.
3. הוודאו שהפתרון נמצא על שני המישורים.

תזכורת (מההרצאה)

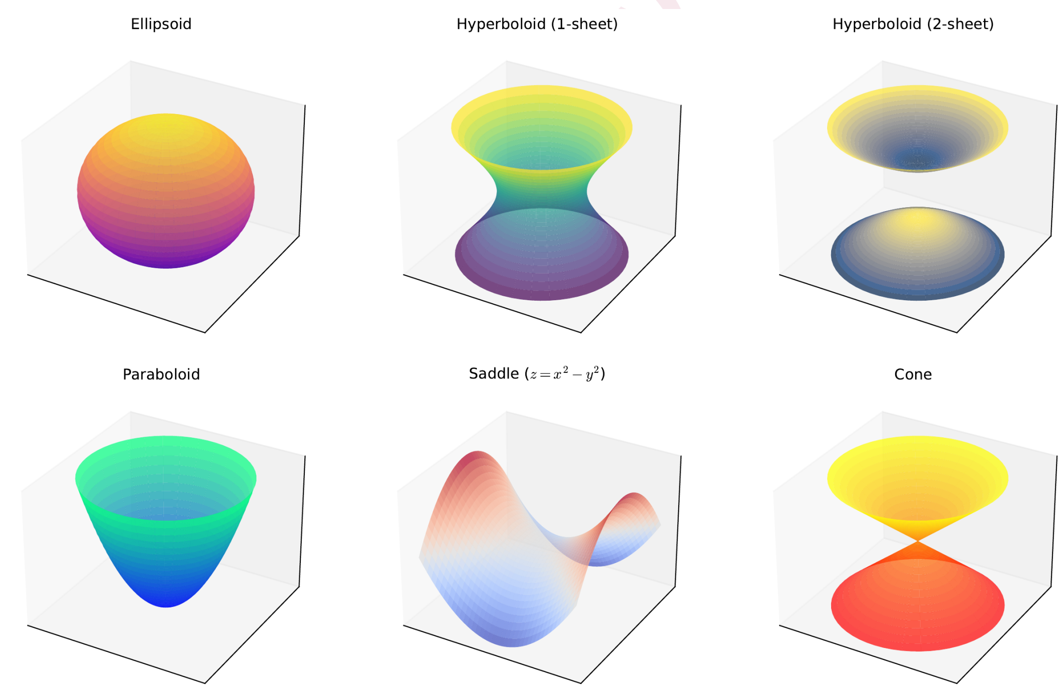
זוויות: זווית בין מישורים: $\cos\alpha = |\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|/(|\vec{n}_1||\vec{n}_2|)$. זווית בין ישר ומישור: $\sin\alpha = |\vec{v}\cdot\vec{n}|/(|\vec{v}||\vec{n}|)$ - *סינוס*, לא קוסינוס.

1.5 משטחים ריבועיים

הערה קטנה ומועילה

משטח ריבועי - קבוצת אפסים של פולינום ריבועי במרחב. לאחר השלמת ריבועים וסיבוב צירים, הצורות הקנוניות הן:

- **אליפסואיד:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
- **היפרבולואיד חד-יריעתי:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ - ארובת קירור גרעינית.
- **היפרבולואיד דו-יריעתי:** $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
- **פרבולואיד אליפטי:** $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.
- **פרבולואיד היפרבולי (אוכף):** $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.
- **חרוט:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$.



עיקרון מנחה

<u>אסטרטגיה לזיהוי משטח.</u>

1. **השלם ריבועים** בכל קואורדינטה: $ax^2 + bx = a(x + b/(2a))^2 - b^2/(4a)$.
2. הזז את הראשית: $X = x - x_0$ וכו'.
3. השווה לטבלה הקנונית. שים לב לסימנים - היפרבולואיד חד או דו-יריעתי תלוי בכמות הסימנים השליליים.
4. **חתכים מרובים:** חיתוך עם המישורים $z = z_0$ קבוע נותן עקומה ב-xy. אם זה מעגל/אליפסה ⇐ אליפסואיד או דומה; אם זה היפרבולה ⇐ משטח אוכף או היפרבולואיד.

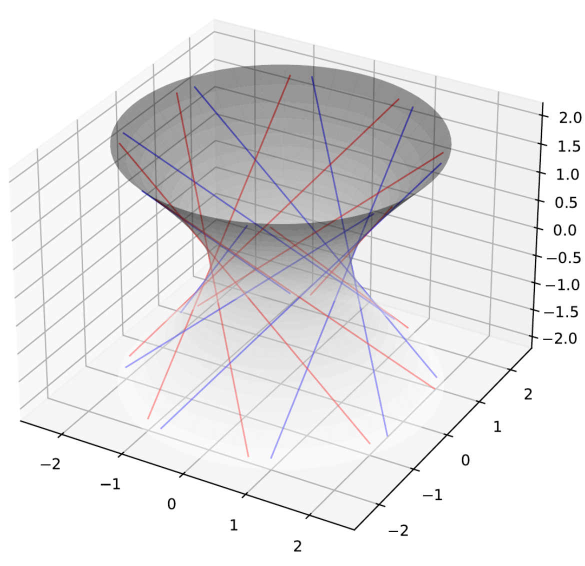
הערה קטנה ומועילה

היפרבולואיד דו-קווי: ההיפרבולואיד החד-יריעתי $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ הוא משטח *מיוחד*: דרך כל נקודה עליו עוברים *שני קווים ישרים* שלמים המוכלים במשטח. שתי משפחות:

$$L_\alpha^\pm : \vec{r}(t) = (\cos\alpha \mp t\sin\alpha,\ \sin\alpha \pm t\cos\alpha,\ t).$$

זוהי הסיבה שניתן לבנות ארובת קירור גרעינית מאסיפה של מוטות ישרים - אף שהצורה הסופית עקומה.

Hyperboloid 1-sheet: two families of straight lines



1.6 תחום הגדרה

הגדרה פורמלית

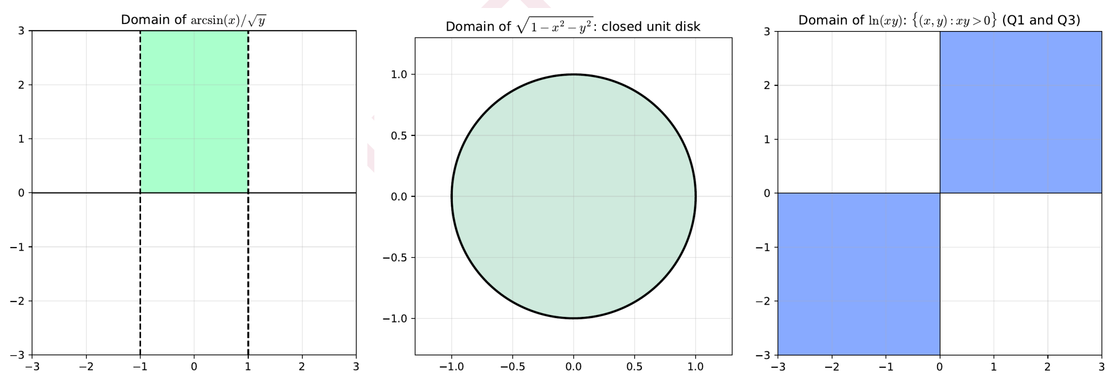
__תחום הגדרה.__ לפונקציה $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, **תחום ההגדרה** הוא הקבוצה $D(f)\subseteq\mathbf{R}^n$ של כל הנקודות שבהן הביטוי $f(\vec{x})$ מוגדר היטב (לא חלוקה ב-0, שורש של שלילי, $\ln$ של אי-חיובי וכו').

עיקרון מנחה

__מציאת תחום הגדרה: ניתוח אילוצים.__ לכל "מבנה אלגברי" בביטוי f, רושמים את האילוץ המתאים:

- $\sqrt{g(\vec{x})}$: $g(\vec{x})\geq 0$.
- $\ln g(\vec{x})$ או $\log g(\vec{x})$: $g(\vec{x})>0$.
- $1/g(\vec{x})$: $g(\vec{x})\neq 0$.
- $\arcsin g(\vec{x}),\arccos g(\vec{x})$: $-1\leq g(\vec{x})\leq 1$.
- $\tan g(\vec{x})$: $g(\vec{x})\neq\pi/2+k\pi$.

תחום ההגדרה = **חיתוך** כל האילוצים. שרטטו אותו במישור!



דוגמה 1.6.1.

1. $f(x,y)=\ln(xy)$. אילוץ: $xy>0$. תחום: $\{x>0,y>0\}\cup\{x<0,y<0\}$ - הרביעים הראשון והשלישי.
2. $g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. אילוץ: $x^2+y^2\leq 1$. תחום: הדיסק הסגור היחידה.
3. $h(x,y)=\arcsin(x)/\sqrt{y}$. אילוצים: $-1\leq x\leq 1$, $y>0$. תחום: רצועה אנכית $[-1,1]\times(0,\infty)$.

עיקרון מנחה

<u>תחום הגדרה לא תמיד פתוח/סגור.</u> לרוב התחום הוא איחוד או חיתוך של פנים ושפות, ולכן עשוי להיות לא-פתוח-לא-סגור. במקרים אלה מציינים בדיוק אילו חלקי שפה כלולים.

1.7 קווי גובה ומשטחי רמה

הגדרה פורמלית

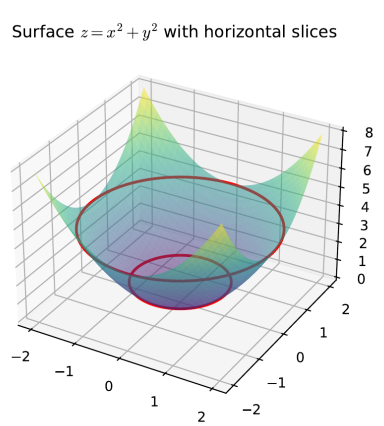
<u>קבוצת רמה.</u> לפונקציה $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, ה**קבוצת הרמה** ברמה c:

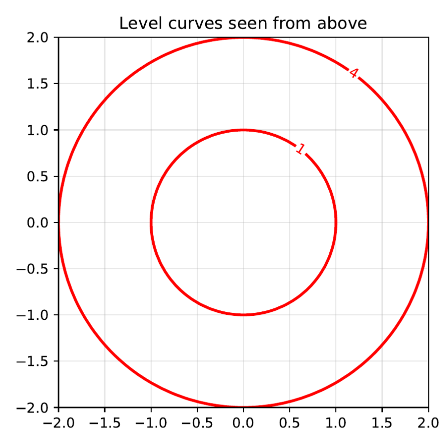
$$L_c=\{\vec{x}\in\mathbf{R}^n : F(\vec{x})=c\}.$$

ב-$\mathbf{R}^2$: **קו גובה** ב-$\mathbf{R}^3$: **משטח רמה**ץ

הערה קטנה ומועילה

<u>אינטרפרטציה גיאומטרית.</u> קו גובה הוא בדיוק החתך של גרף הפונקציה $z=F(x,y)$ עם מישור אופקי $z=c$, ואז ההיטל שלו על מישור xy. כמו "מפת גובה" של הר - כל קו = יעני ערך קבוע.



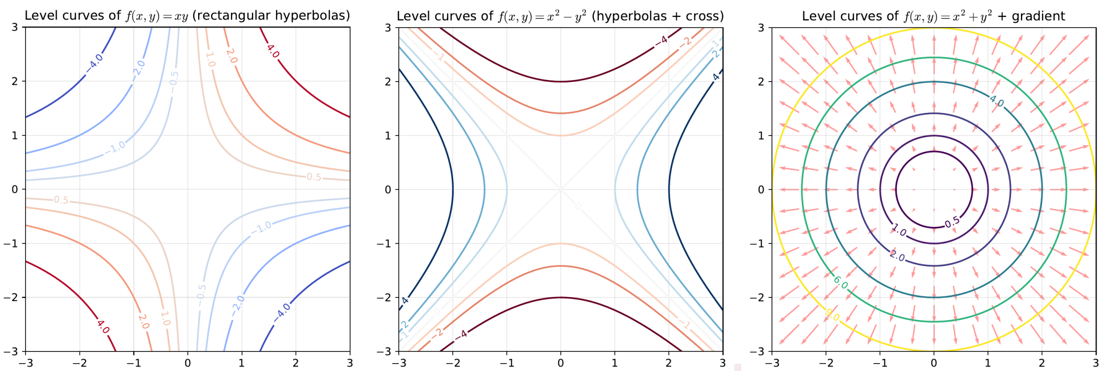


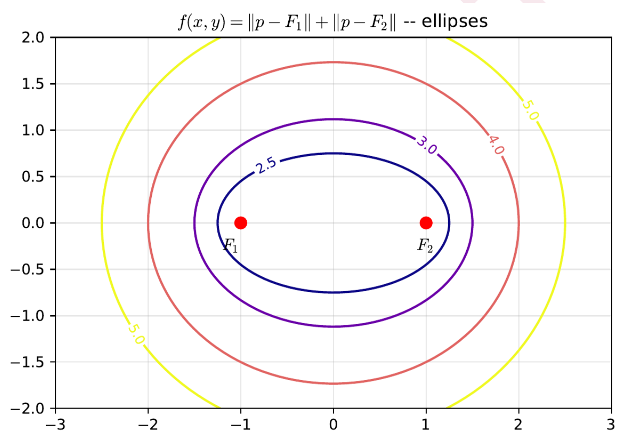
דוגמה 1.7.1.

ארבע משפחות קלאסיות של קווי גובה:

- $F(x,y)=x^2+y^2$: L_c = מעגל ברדיוס $\sqrt{c}$ ($c>0$); נקודה ב-$c=0$; ריקה $c<0$.
- $F(x,y)=x^2-y^2$: L_c = היפרבולה (אופקית או אנכית); זוג קווים $y=\pm x$ ב-$c=0$.

- $F(x,y)=xy$: L_c = היפרבולה רגולרית; זוג צירים $c=0$.
- $F(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}$ (סכום מרחקים מ-2 מוקדים): L_c = אליפסה.





הערה קטנה ומועילה

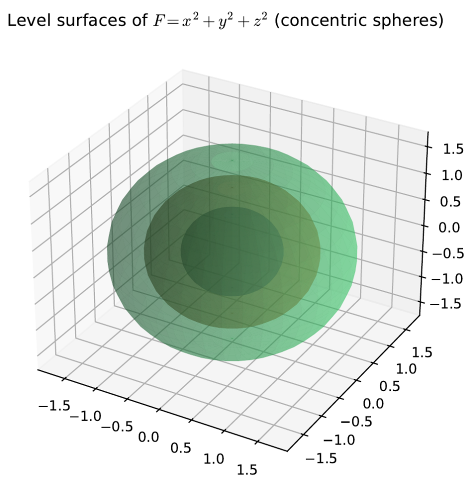
תכונה מרכזית (מההרצאה): לכל $\vec{x}_0$ עם $\nabla F(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$, הוקטור $\nabla F(\vec{x}_0)$ **ניצב למשטח הרמה** $L_{F(\vec{x}_0)}$ ב-$\vec{x}_0$.

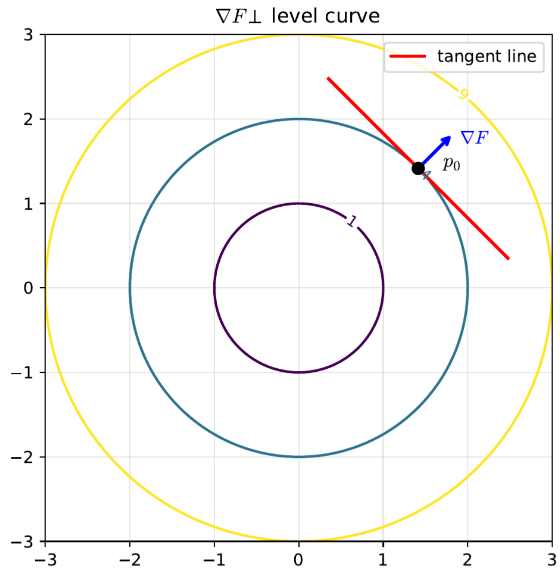
הערה קטנה ומועילה

מישור משיק למשטח רמה:

$$\nabla F(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)=0.$$

זהו מישור עם נורמל $\nabla F(\vec{x}_0)$ העובר דרך $\vec{x}_0$.





עיקרון מנחה

<u>אלגוריתם לציור קווי גובה.</u>

1. הציבו $F(x,y)=c$ למספר ערכי c נבחרים ($c=-2,-1,0,1,2,\dots$).
2. פתרו את המשוואה (לפעמים סגרית, לפעמים גיאומטרית).
3. ציירו כל עקומה. ערכי c קרובים $\to$ קווים צפופים $\to$ שיפוע גדול.
4. הוסיפו וקטורי גרדיאנט - ניצבים לקווים.

תזכורת (מההרצאה)

טעות נפוצה: ערבוב (או בלבול) בין קו גובה לבין גרף. הגרף $z=F(x,y)$ הוא משטח דו-ממדי ב-$\mathbf{R}^3$. קו גובה הוא עקומה במישור xy.

1.8 טופולוגיה ב-R^n

הגדרה פורמלית

<u>כדורים.</u> $\{\vec{x}:|\vec{x}-\vec{x}_0|<r\}=B_r(\vec{x}_0)$ - פתוח. $\{\vec{x}:|\vec{x}-\vec{x}_0|\le r\}=\overline{B_r(\vec{x}_0)}$ - סגור.

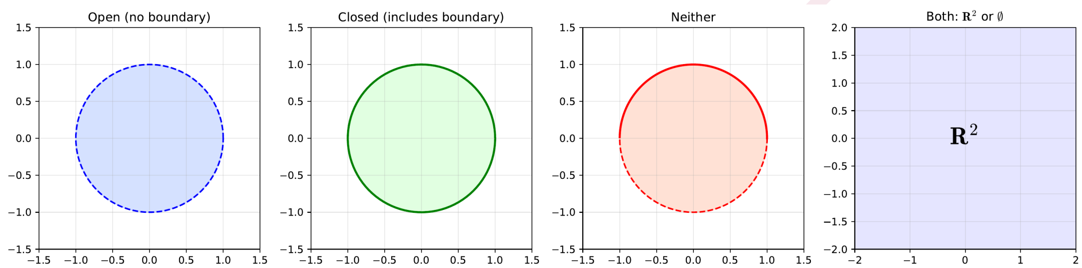
הגדרה פורמלית

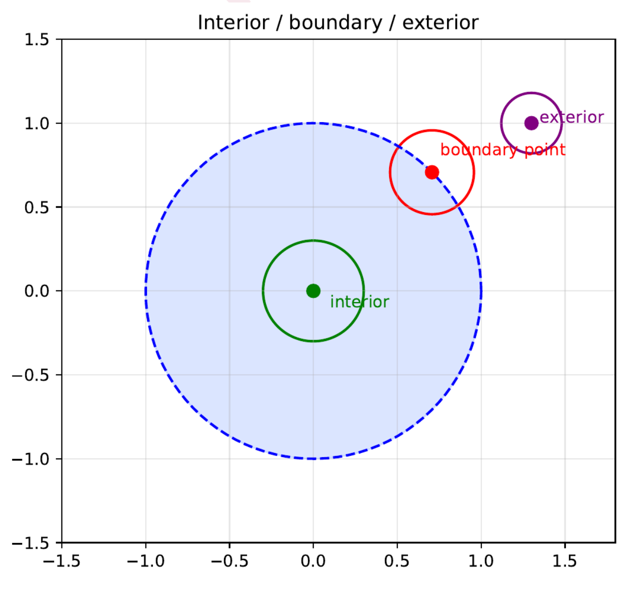
קבוצה פתוחה / סגורה. A **פתוחה** אם לכל $A \in \vec{x}$ יש $r > 0$ עם $B_r(\vec{x}) \subseteq A$. A **סגורה** אם המשלים $A \setminus \mathbf{R}^n$ פתוח.

הגדרה פורמלית

פנים, סגור, שפה.

- **פנים** A°: כל הנקודות עם סביבה שלמה ב-A.
- **סגור** $\overline{A}$: A יחד עם נקודות הצבירה.
- **שפה** $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$: נקודות שכל סביבה שלהן מכילה גם איברי A וגם איברי המשלים.





דוגמה 1.8.1.

מצאו את הפנים של הקבוצה

$$A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}.$$

פתרון

עיקרון מנחה

נקודות הפנים הן הנקודות שאפשר לשים סביבן קטע פתוח קטן שנשאר כולו בתוך הקבוצה.

נבדוק את הנקודות של הקטע

$$[0,1].$$

אם

$$x \in (0,1),$$

אז המרחק של x מן הקצה השמאלי הוא x, והמרחק שלו מן הקצה הימני הוא $1-x$. נגדיר

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\}.$$

אז

$$\varepsilon > 0$$

ומתקיים

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq [0,1].$$

לכן כל נקודה ב-$(0,1)$ היא נקודת פנים.
לעומת זאת, 0 אינה נקודת פנים, כי לכל

$$\varepsilon > 0$$

הקטע

$$(-\varepsilon, \varepsilon)$$

מכיל נקודות שליליות שאינן ב-$[0,1]$.
גם 1 אינה נקודת פנים, כי לכל

$$\varepsilon > 0$$

הקטע

$$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

מכיל נקודות גדולות מ-1, שאינן ב-$[0,1]$.
לכן

$$\boxed{A^\circ = (0,1)}.$$

■

הערה קטנה ומועילה

תכונות בסיסיות (מההרצאה):

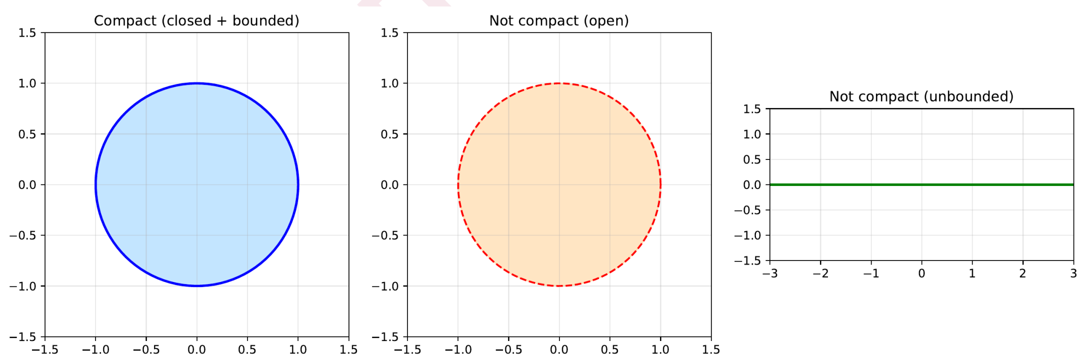
- איחוד *כלשהו* של פתוחות - פתוחה.
- חיתוך *סופי* של פתוחות - פתוחה.
- ע"י דה-מורגן: חיתוך כלשהו של סגורות - סגורה; איחוד סופי של סגורות - סגורה.
- **אפיון סדרתי של סגירות:** A סגורה $\iff$ לכל $\vec{x}_n \in A$ עם $\vec{x}_n \to \vec{x}$ נובע $\vec{x} \in A$.
- A **פתוחה** $\iff A = A^\circ \iff A \cap \partial A = \emptyset$.
- A **סגורה** $\iff A = \overline{A} \iff \partial A \subseteq A$.

עיקרון מנחה

<u>אינטואיציה.</u> "פתוחה" = "בלי שפה" (השפה לא בקבוצה). "סגורה" = "כוללת שפה". "שתיהן" = יוצא הדופן: רק $\emptyset$ ו-$\mathbb{R}^n$. ראינו את הסיבה בקשירות.

הגדרה פורמלית

<u>קבוצה חסומה וקומפקטית.</u> A **חסומה** אם יש M עם $A \subseteq B_M(\vec{0})$. A **קומפקטית** (לפי משפט היינה-בורל) $\iff$ סגורה *וחסומה*.



הערה קטנה ומועילה

חשוב לא להתבלבל: תמיד $A \subseteq \overline{A}$. לכן כאשר אומרים ש-A מכילה את הסגור שלה, הכוונה היא לבדוק את הכיוון הלא אוטומטי:
$$\overline{A} \subseteq A.$$
אם זה נכון, אז $A = \overline{A}$, ולכן A סגורה.

הגדרה פורמלית

נקודת שפה
תהי
$$A \subseteq \mathbb{R}^n.$$
נקודה
$$x_0 \in \mathbb{R}^n$$
נקראת נקודת שפה של A, אם כל כדור פתוח סביב x_0 פוגש גם את A וגם את המשלים של A.
כלומר לכל
$$\varepsilon > 0$$
מתקיים
$$B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$$
וגם
$$B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset.$$
קבוצת כל נקודות השפה של A מסומנת
$$\partial A.$$
לכן
$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ וגם } B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset\}.$$

תרגיל 1.8.2.

בדקו האם הקבוצה
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$$
חסומה.

פתרון.

עיקרון מנחה

הקבוצה נמצאת בתוך מעגל ברדיוס 3, ולכן היא חסומה.

אם
$$(x,y)\in A,$$
אז
$$x^2+y^2<9.$$
כלומר
$$\|(x,y)\|<3.$$
לכן כל נקודה ב-A נמצאת בתוך הכדור הפתוח ברדיוס 3 סביב הראשית:
$$A\subseteq B_3(0).$$
בפרט אפשר לקחת למשל
$$M=3.$$
לכן
$$\boxed{A \text{ חסומה .}}$$
□

תרגיל 1.8.3.

בדקו האם הקבוצה
$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y>x^2\}$$
חסומה.

<u>פתרון.</u>

עיקרון מנחה

כדי להראות שקבוצה אינה חסומה, מספיק למצוא נקודות בקבוצה שמתרחקות לאינסוף.

ניקח לכל $t>0$ את הנקודה
$$p_t=(0,t).$$
אז
$$y=t$$
ו-
$$x^2=0^2=0.$$
לכן
$$t>0=x^2,$$

כלומר

$$p_t \in B.$$

אבל

$$\|p_t\| = \sqrt{0^2 + t^2} = t.$$

כאשר $t \to \infty$, נקבל

$$\|p_t\| \to \infty.$$

לכן אין מספר $M > 0$ שיכול לחסום את כל הנורמות של נקודות B. מכאן

$\boxed{B \text{ אינה חסומה.}}$

$\square$

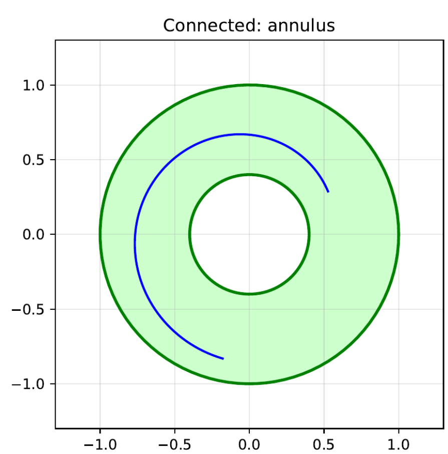
ניצחון

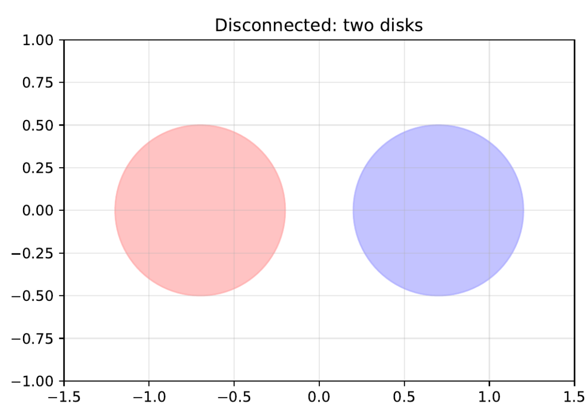
1.9 קשירות

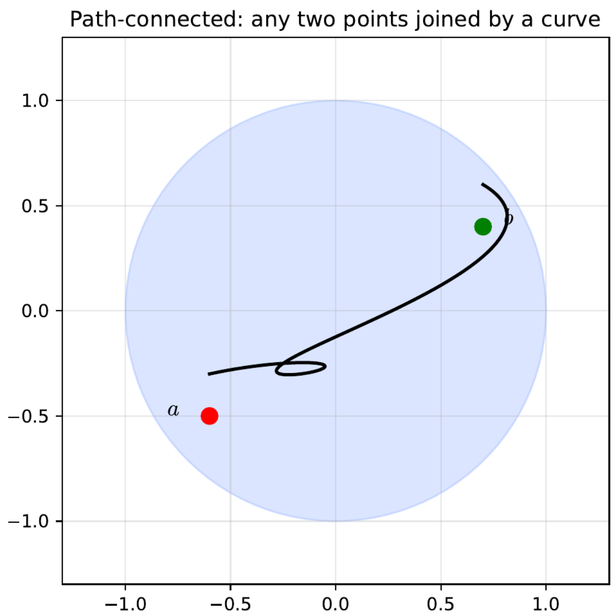
הגדרה פורמלית

קשירה. A **קשירה** אם לא ניתן להציג אותה כ-$A = U \cup V$ של פתוחות, זרות, לא ריקות.

קשירה מסילתית. לכל $\vec{a}, \vec{b} \in A$ יש מסלול רציף $\vec{\gamma} : [0,1] \to A$ עם $\vec{\gamma}(0) = \vec{a}, \vec{\gamma}(1) = \vec{b}$.







הערה קטנה ומועילה

האינטואיציה היא שקבוצה קשירה היא קבוצה שעשויה מחתיכה אחת. אם אפשר להפריד אותה לשני אזורים מנותקים, היא אינה קשירה.

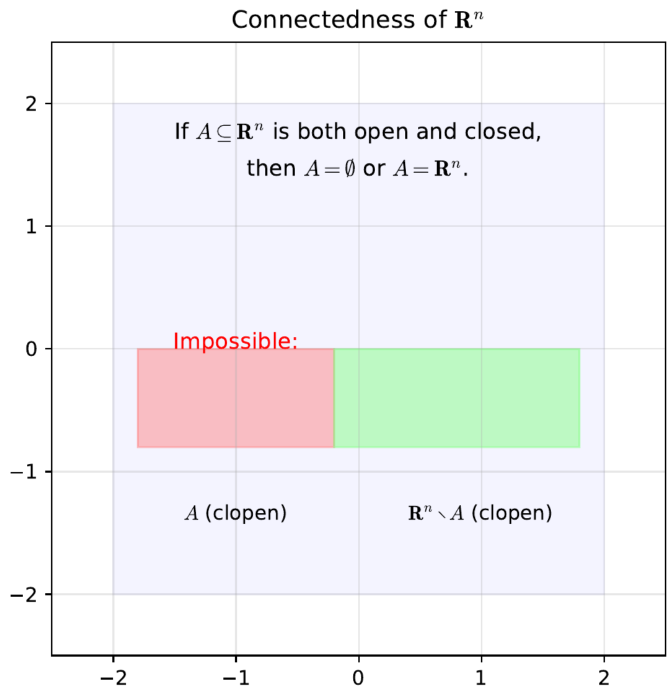
הערה קטנה ומועילה

משפטים מרכזיים (מההרצאה):

- קשירה מסילתית $\Leftarrow$ קשירה.
- $\mathbf{R}^n$ קשיר (כל שתי נקודות מחוברות בקטע).
- קשירות נשמרת תחת רציפות: A קשירה, f רציפה $\Leftarrow$ $f(A)$ קשירה.
- תת-קבוצות קשירות ב-$\mathbf{R}$ הן בדיוק קטעים.

טענה 1.9.1.

אם $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *גם* פתוחה *וגם* סגורה, אז $A = \emptyset$ או $A = \mathbf{R}^n$.



הערה קטנה ומועילה

משפט ערך הביניים ב-$\mathbf{R}^n$: A קשירה, $f : A \to \mathbf{R}$ רציפה, ו-f מקבלת ערכים α, β ב-A $\Leftarrow$ f מקבלת כל ערך בין α ל-β.

תרגיל 1.9.2.

הראו שהקבוצה

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

קשירה מסילתית.

פתרון.

עיקרון מנחה

במישור אפשר לעקוף את הראשית. לכן הסרת נקודה אחת לא קורעת את המישור.

ניקח שתי נקודות

$$a, b \in A.$$

אם הקטע הישר בין a ל-b אינו עובר דרך הראשית, נגדיר

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb, \qquad 0 \le t \le 1.$$

אז γ רציפה, מתחילה ב-a, מסתיימת ב-b, ואינה עוברת דרך הראשית. לכן היא נשארת בתוך A.
אם הקטע הישר כן עובר דרך הראשית, נבחר נקודה

$$c \in A$$

שאינה נמצאת על הישר העובר דרך a ו-b. אז הקטע מ-a ל-c אינו עובר דרך הראשית, וגם הקטע מ-c ל-b אינו עובר דרך הראשית.
לכן אפשר לחבר את a ל-b במסלול שבור:

$$a \longrightarrow c \longrightarrow b.$$

המסלול כולו נשאר בתוך

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

לכן

$$\boxed{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ קשירה מסילתית}}.$$

בפרט היא גם קשירה.

$\square$

תרגיל 1.9.3.

הראו שהקבוצה

$$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

אינה קשירה.

פתרון.

עיקרון מנחה

בישר אי אפשר לעקוף נקודה חסרה. הסרת 0 קורעת את הישר לשני חלקים.

אפשר לכתוב

$$A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

נסמן

$$U = (-\infty, 0), \qquad V = (0, \infty).$$

אז

$$U \neq \emptyset, \qquad V \neq \emptyset,$$

$$U \cap V = \emptyset,$$

ו-

$$U \cup V = A.$$

בנוסף, U ו-V פתוחות יחסית בתוך A. לכן קיבלנו הפרדה של A.
מכאן

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ אינה קשירה }.}$$

□

ניצחון

1.9.1 סיכום שימושי

$$\boxed{A \text{ פתוחה } \iff \forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0 :\ B_\varepsilon(x) \subseteq A.}$$

$$\boxed{x \in A^\circ \iff \exists \varepsilon > 0 :\ B_\varepsilon(x) \subseteq A.}$$

$$\boxed{x \in \partial A \iff \forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ וגם } B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset.}$$

$$\boxed{\overline{A} = A \cup \partial A.}$$

$$\boxed{A \text{ סגורה } \iff \overline{A} = A.}$$

$$\boxed{A \text{ סגורה } \iff \overline{A} \subseteq A.}$$

$$\boxed{A \text{ פתוחה } \iff A^c \text{ סגורה }.}$$

$$\boxed{A \text{ סגורה } \iff A^c \text{ פתוחה }.}$$

$$\boxed{A \text{ חסומה } \iff \exists M > 0 \text{ כך שלכל } x \in A,\ \|x\| \leq M.}$$

$$\boxed{A \text{ קשירה מסילתית } \implies A \text{ קשירה }.}$$

1.10 תרגילים

תרגיל 1.10.1.

מצאו את משוואת המישור העובר דרך הנקודה

$$P_0 = (2, -1, 3)$$

ובעל וקטור נורמל

$$\vec{n} = (1, 2, -2).$$

לאחר מכן בדקו האם הנקודה

$$Q = (0, 1, 4)$$

נמצאת על המישור.

פתרון.

עיקרון מנחה

מישור במרחב נקבע על ידי נקודה אחת שעליו ווקטור נורמל אחד. וקטור נורמל הוא וקטור המאונך לכל כיוון שנמצא בתוך המישור.

נסמן נקודה כללית במרחב על ידי

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

אם המישור עובר דרך

$$P_0 = (2, -1, 3),$$

אז הווקטור מן הנקודה P_0 אל הנקודה הכללית (x, y, z) הוא

$$\vec{r} - \vec{p}_0 = (x - 2, y + 1, z - 3).$$

מאחר ש-$\vec{n} = (1, 2, -2)$ הוא נורמל למישור, חייב להתקיים

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{p}_0) = 0.$$

לכן

$$(1, 2, -2) \cdot (x - 2, y + 1, z - 3) = 0.$$

נחשב את המכפלה הסקלרית:

$$1(x - 2) + 2(y + 1) - 2(z - 3) = 0.$$

כלומר

$$x - 2 + 2y + 2 - 2z + 6 = 0.$$

נקבל

$$\boxed{x + 2y - 2z + 6 = 0.}$$

כעת נבדוק אם

$$Q = (0, 1, 4)$$

נמצאת על המישור. נציב:

$$0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 6 = 0 + 2 - 8 + 6 = 0.$$

לכן הנקודה Q אכן נמצאת על המישור.

$\square$

תרגיל 1.10.2.

מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות

$$A = (1, 0, 2), \qquad B = (3, 1, 1), \qquad C = (2, -1, 4).$$

בדקו בסוף שהמשוואה שמצאתם באמת מתקיימת עבור שלוש הנקודות.

פתרון.

עיקרון מנחה

שלוש נקודות שאינן על אותו ישר קובעות מישור יחיד. כדי למצוא נורמל למישור נבנה שני וקטורי כיוון במישור ונחשב את המכפלה הווקטורית שלהם.

נחשב שני וקטורים שיושבים בתוך המישור:

$$AB = B - A = (3, 1, 1) - (1, 0, 2) = (2, 1, -1),$$

וכן

$$AC = C - A = (2, -1, 4) - (1, 0, 2) = (1, -1, 2).$$

וקטור נורמל למישור מתקבל על ידי מכפלה וקטורית:

$$\vec{n} = AB \times AC.$$

נחשב:

$$AB \times AC = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

לכן

$$\vec{n} = \vec{i}(1 \cdot 2 - (-1)(-1)) - \vec{j}(2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) + \vec{k}(2(-1) - 1 \cdot 1).$$

כלומר

$$\vec{n} = \vec{i}(2 - 1) - \vec{j}(4 + 1) + \vec{k}(-2 - 1) = (1, -5, -3).$$

כעת נשתמש בנקודה $A = (1,0,2)$. משוואת המישור היא

$$\vec{n} \cdot ((x,y,z) - A) = 0.$$

כלומר

$$(1,-5,-3) \cdot (x-1, y, z-2) = 0.$$

נקבל

$$(x-1) - 5y - 3(z-2) = 0.$$

נפתח:

$$x - 1 - 5y - 3z + 6 = 0.$$

לכן

$$\boxed{x - 5y - 3z + 5 = 0.}$$

נבדוק את שלוש הנקודות.
עבור $A = (1,0,2)$:

$$1 - 5 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 5 = 1 - 6 + 5 = 0.$$

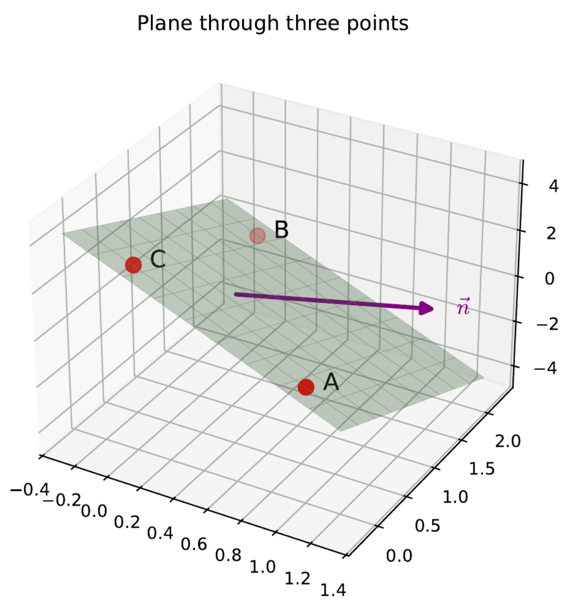
עבור $B = (3,1,1)$:

$$3 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 5 = 3 - 5 - 3 + 5 = 0.$$

עבור $C = (2,-1,4)$:

$$2 - 5(-1) - 3 \cdot 4 + 5 = 2 + 5 - 12 + 5 = 0.$$

כל שלוש הנקודות מקיימות את משוואת המישור.



□

ניצחון

תרגיל 1.10.3.

מצאו את נקודת החיתוך בין הישר

$$L: \quad \vec{r}(t) = (1,2,0) + t(2,-1,3)$$

לבין המישור

$$\pi: \quad x + 2y - z = 4.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

נקודת חיתוך בין ישר למישור מתקבלת על ידי הצבת הפרמטריזציה של הישר בתוך משוואת המישור. אם מתקבל ערך יחיד של t, יש נקודת חיתוך יחידה.

מן הישר נקבל

$$x = 1 + 2t, \qquad y = 2 - t, \qquad z = 3t.$$

נציב במשוואת המישור:

$$x + 2y - z = 4.$$

לכן

$$(1+2t) + 2(2-t) - 3t = 4.$$

נפתח:

$$1 + 2t + 4 - 2t - 3t = 4.$$

כלומר

$$5 - 3t = 4.$$

ולכן

$$-3t = -1,$$

ומכאן

$$t = \frac{1}{3}.$$

נציב בישר:

$$x = 1 + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$
$$y = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$
$$z = 3\cdot\frac{1}{3} = 1.$$

לכן נקודת החיתוך היא

$$\boxed{\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)}.$$

נבדוק:

$$\frac{5}{3}+2\cdot\frac{5}{3}-1=\frac{5}{3}+\frac{10}{3}-1=5-1=4.$$

ולכן הנקודה אכן נמצאת על המישור.

$\square$

ניצחון

תרגיל 1.10.4.

מצאו את ישר החיתוך של שני המישורים

$$\pi_1: \quad x+y+z=2,$$

$$\pi_2: \quad 2x-y+3z=1.$$

כתבו את התשובה בצורה פרמטרית.

פתרון.

עיקרון מנחה

ישר החיתוך נמצא בתוך שני המישורים. לכן כיוונו מאונך לשני הנורמלים של המישורים, ולכן כיוון הישר הוא המכפלה הווקטורית של הנורמלים.

למישור הראשון יש נורמל

$$\vec{n}_1=(1,1,1).$$

למישור השני יש נורמל

$$\vec{n}_2=(2,-1,3).$$

וקטור הכיוון של ישר החיתוך הוא

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2.$$

נחשב:

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}.$$

ולכן

$$\vec{v}=\vec{i}(1\cdot 3-1(-1))-\vec{j}(1\cdot 3-1\cdot 2)+\vec{k}(1(-1)-1\cdot 2).$$

כלומר

$$\vec{v}=\vec{i}(3+1)-\vec{j}(3-2)+\vec{k}(-1-2)=(4,-1,-3).$$

כעת צריך למצוא נקודה אחת שנמצאת על שני המישורים. נבחר למשל

$$z=0.$$

אז נקבל את המערכת

$$x + y = 2, \qquad 2x - y = 1.$$

נחבר את שתי המשוואות:

$$3x = 3,$$

ולכן

$$x = 1.$$

מכאן

$$1 + y = 2,$$

ולכן

$$y = 1.$$

אז נקודת חיתוך אחת היא

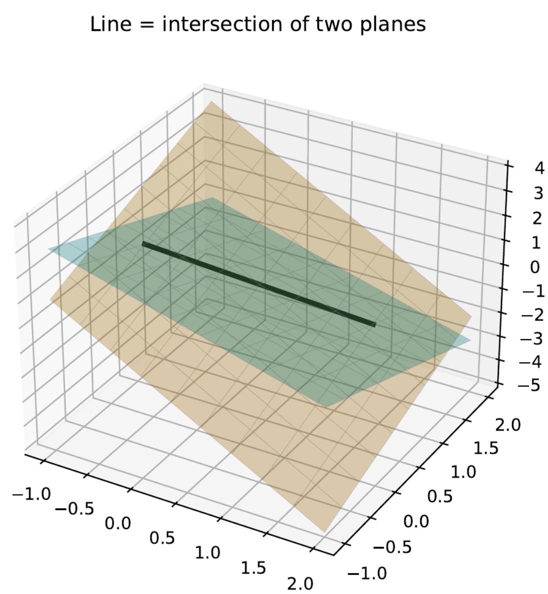
$$P_0 = (1, 1, 0).$$

לכן ישר החיתוך הוא

$$\boxed{\vec{r}(t) = (1, 1, 0) + t(4, -1, -3)}$$

כלומר

$$\boxed{(x, y, z) = (1 + 4t, 1 - t, -3t)}.$$



□

ניצחון

תרגיל 1.10.5.

מצאו את המרחק מן הנקודה

$$P = (4, 0, 1)$$

אל המישור

$$\pi : \quad 2x - y + 2z = 3.$$

בנוסף מצאו את הנקודה הקרובה ביותר על המישור לנקודה P.

פתרון.

עיקרון מנחה

הנקודה הקרובה ביותר על מישור מתקבלת על ידי הליכה מן הנקודה הנתונה בכיוון הנורמל למישור. המרחק נמדד בדיוק לאורך הכיוון המאונך למישור.

נכתוב את המישור בצורה

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = c,$$

כאשר

$$\vec{n} = (2, -1, 2), \qquad c = 3.$$

הנקודה הנתונה היא

$$P = (4, 0, 1).$$

נחשב:

$$\vec{n} \cdot P = (2, -1, 2) \cdot (4, 0, 1) = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 10.$$

לכן

$$\vec{n} \cdot P - c = 10 - 3 = 7.$$

נורמת הנורמל היא

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

לכן המרחק הוא

$$d(P, \pi) = \frac{|\vec{n} \cdot P - c|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|7|}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}.$$

כעת נמצא את הנקודה הקרובה ביותר. נסמן אותה Q. היא מתקבלת בצורה

$$Q = P - \alpha \vec{n}.$$

הסיבה לסימן מינוס היא שהנקודה P נמצאת בצד שבו

$$\vec{n} \cdot P - c > 0,$$

ולכן צריך לנוע בכיוון ההפוך לנורמל כדי להגיע אל המישור.
נדרוש ש-Q תהיה על המישור:

$$\vec{n} \cdot Q = c.$$

נציב

$$Q = P - \alpha\vec{n}.$$

נקבל

$$\vec{n} \cdot (P - \alpha\vec{n}) = c.$$

כלומר

$$\vec{n} \cdot P - \alpha\|\vec{n}\|^2 = c.$$

ולכן

$$\alpha = \frac{\vec{n} \cdot P - c}{\|\vec{n}\|^2}.$$

כאן

$$\|\vec{n}\|^2 = 9,$$

ולכן

$$\alpha = \frac{7}{9}.$$

מכאן

$$Q = (4, 0, 1) - \frac{7}{9}(2, -1, 2).$$

לכן

$$Q = \left(4 - \frac{14}{9}, 0 + \frac{7}{9}, 1 - \frac{14}{9}\right).$$

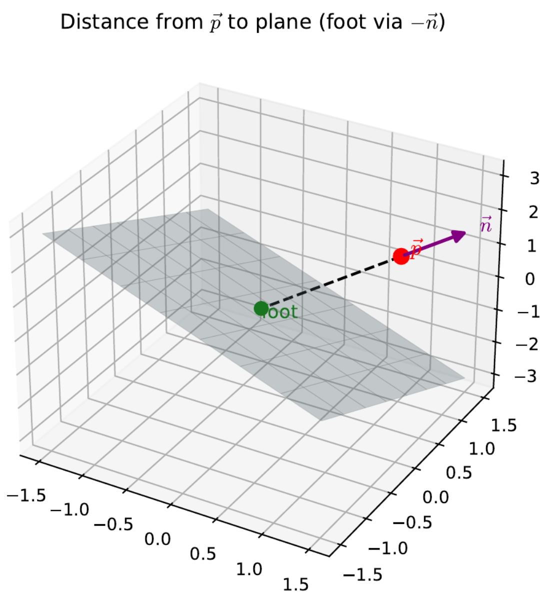
נקבל

$$\boxed{Q = \left(\frac{22}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{5}{9}\right)}.$$

נבדוק:

$$2 \cdot \frac{22}{9} - \frac{7}{9} + 2\left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{44}{9} - \frac{7}{9} - \frac{10}{9} = \frac{27}{9} = 3.$$

לכן Q אכן נמצאת על המישור.



$\square$

תרגיל 1.10.6.

מצאו את הנקודה הקרובה ביותר על הישר

$$L: \quad \vec{r}(t) = (2,-1,1) + t(1,2,-2)$$

לנקודה

$$P = (3,4,0).$$

חשבו גם את המרחק מן הנקודה אל הישר.

פתרון.

עיקרון מנחה

אף על פי שהישר נמצא במרחב, אנחנו גוזרים פונקציה של משתנה ממשי אחד בלבד. המשתנה הוא t, והפונקציה היא ריבוע המרחק בין P לבין הנקודה הכללית על הישר.

נסמן

$$\vec{p}_0 = (2,-1,1), \qquad \vec{v} = (1,2,-2).$$

נקודה כללית על הישר היא

$$\vec{r}(t) = \vec{p}_0 + t\vec{v}.$$

אנחנו רוצים למזער את המרחק

$$\|\vec{r}(t) - P\|.$$

במקום למזער את המרחק עצמו, נמזער את ריבוע המרחק:

$$f(t) = \|\vec{r}(t) - P\|^2.$$

זה מותר כי פונקציית השורש עולה, ולכן למרחק ולריבוע המרחק יש אותו מינימום.
נחשב לפי הנוסחה של היטל:

$$t^* = \frac{(P-\vec{p}_0)\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}.$$

ראשית

$$P - \vec{p}_0 = (3,4,0) - (2,-1,1) = (1,5,-1).$$

לכן

$$(P-\vec{p}_0)\cdot\vec{v} = (1,5,-1)\cdot(1,2,-2) = 1 + 10 + 2 = 13.$$

בנוסף

$$\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 2^2 + (-2)^2 = 1 + 4 + 4 = 9.$$

לכן

$$t^* = \frac{13}{9}.$$

נציב בישר:

$$\vec{r}(t^*) = (2,-1,1) + \frac{13}{9}(1,2,-2).$$

נקבל

$$\vec{r}(t^*) = \left(2 + \frac{13}{9}, -1 + \frac{26}{9}, 1 - \frac{26}{9}\right).$$

לכן

$$\boxed{Q = \left(\frac{31}{9}, \frac{17}{9}, -\frac{17}{9}\right)}.$$

כעת נחשב את המרחק:

$$P - Q = \left(3 - \frac{31}{9}, 4 - \frac{17}{9}, 0 + \frac{17}{9}\right) = \left(-\frac{4}{9}, \frac{19}{9}, \frac{17}{9}\right).$$

לכן

$$d(P,L) = \|P-Q\| = \sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{19}{9}\right)^2 + \left(\frac{17}{9}\right)^2}.$$

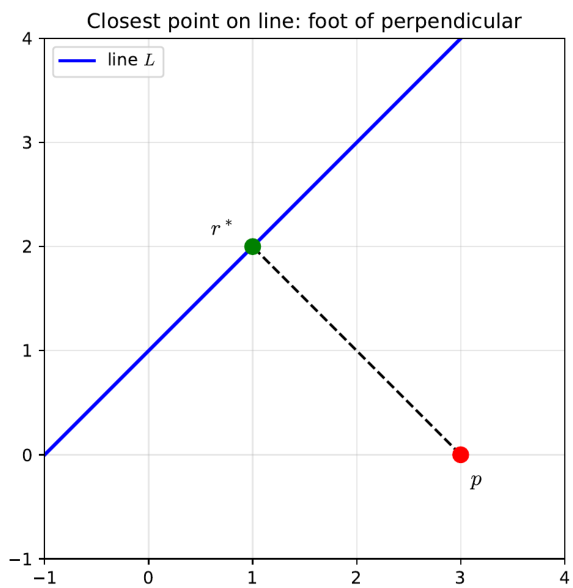
נקבל

$$d(P,L)=\frac{1}{9}\sqrt{16+361+289}=\frac{1}{9}\sqrt{666}=\frac{1}{9}\sqrt{9\cdot 74}=\boxed{\frac{\sqrt{74}}{3}}.$$

נבדוק ניצבות:

$$(P-Q)\cdot\vec{v}=\left(-\frac{4}{9},\frac{19}{9},\frac{17}{9}\right)\cdot(1,2,-2)=-\frac{4}{9}+\frac{38}{9}-\frac{34}{9}=0.$$

כלומר הקטע מן הנקודה P אל הנקודה הקרובה Q אכן מאונך לישר.



□

ניצחון

תרגיל 1.10.7.

נתונים שני הישרים

$$L_1:\quad \vec{r}_1(t)=(1,0,0)+t(1,1,0),$$

$$L_2:\quad \vec{r}_2(s)=(0,2,1)+s(0,1,1).$$

חשבו את המרחק בין הישרים. לאחר מכן מצאו שתי נקודות $Q_1\in L_1$, $Q_2\in L_2$, כך שהקטע Q_1Q_2 הוא הקטע הקצר ביותר בין הישרים.

פתרון.

עיקרון מנחה

בין שני ישרים זרים במרחב, הקטע הקצר ביותר מאונך לשני הישרים. לכן הוא בכיוון המכפלה הווקטורית של שני וקטורי הכיוון.

וקטורי הכיוון הם

$$\vec{v}_1 = (1,1,0), \qquad \vec{v}_2 = (0,1,1).$$

נחשב

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,1).$$

לכן

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

ניקח נקודה אחת על כל ישר:

$$A = (1,0,0) \in L_1, \qquad B = (0,2,1) \in L_2.$$

אז

$$B - A = (-1,2,1).$$

המרחק בין ישרים זרים הוא

$$d(L_1,L_2) = \frac{|(B-A)\cdot(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}.$$

נחשב:

$$(B-A)\cdot\vec{n} = (-1,2,1)\cdot(1,-1,1) = -1-2+1 = -2.$$

לכן

$$\boxed{d(L_1,L_2) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

כעת נמצא את הנקודות הקרובות עצמן. נקודה כללית על L_1 היא

$$Q_1(t) = (1+t, t, 0).$$

נקודה כללית על L_2 היא

$$Q_2(s) = (0, 2+s, 1+s).$$

הווקטור המחבר ביניהן הוא

$$Q_1(t) - Q_2(s) = (1+t, t-2-s, -1-s).$$

בנקודות הקרובות ביותר הווקטור הזה מאונך גם ל-$\vec{v}_1$ וגם ל-$\vec{v}_2$. לכן

$$(Q_1 - Q_2)\cdot\vec{v}_1 = 0, \qquad (Q_1 - Q_2)\cdot\vec{v}_2 = 0.$$

נחשב את התנאי הראשון:

$$(1+t, t-2-s, -1-s)\cdot(1,1,0) = 0.$$

לכן

$$1 + t + t - 2 - s = 0,$$

כלומר

$$2t - s - 1 = 0 \Leftarrow s = 2t - 1.$$

נחשב את התנאי השני:

$$(1+t, t-2-s, -1-s)\cdot(0,1,1) = 0.$$

ולכן

$$t - 2 - s - 1 - s = 0 \Leftarrow t - 3 - 2s = 0.$$

נציב $s = 2t - 1$:

$$t - 3 - 2(2t-1) = 0.$$

נפתח:

$$t - 3 - 4t + 2 = 0 \Leftarrow -3t - 1 = 0 \Leftarrow t = -\frac{1}{3}.$$

אז

$$s = 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{5}{3}.$$

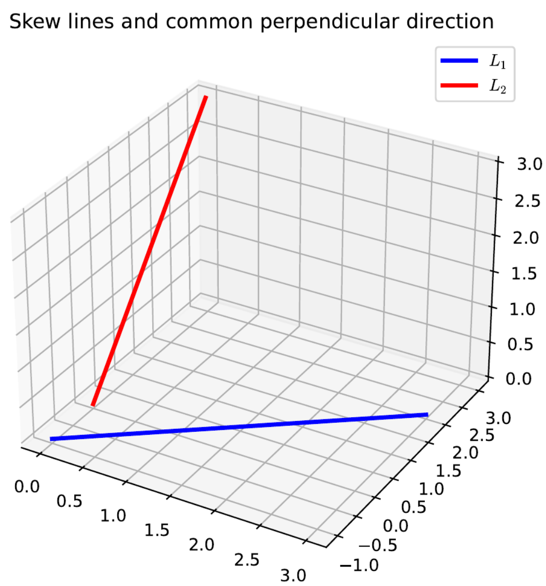
נמצא את הנקודות:

$$\boxed{Q_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right), \qquad Q_2 = \left(0, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)}.$$

נבדוק:

$$Q_1 - Q_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \|Q_1 - Q_2\| = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

זה תואם למרחק שמצאנו.



□

תרגיל 1.10.8.

מצאו את משוואת המישור שמכיל את הישר

$$L: \quad \vec{r}(t) = (1,0,2) + t(2,1,-1)$$

ועובר גם דרך הנקודה

$$P = (0,3,1).$$

פתרון.

עיקרון מנחה

כדי לבנות מישור, צריך שני כיוונים בלתי תלויים שנמצאים בתוכו. כיוון אחד הוא וקטור הכיוון של הישר. כיוון שני הוא וקטור מנקודה על הישר אל הנקודה החיצונית.

נקודה על הישר היא

$$P_0 = (1,0,2).$$

וקטור הכיוון של הישר הוא

$$\vec{v} = (2, 1, -1).$$

כיוון נוסף במישור הוא

$$\vec{w} = P - P_0 = (0, 3, 1) - (1, 0, 2) = (-1, 3, -1).$$

וקטור נורמל למישור הוא

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

לכן

$$\vec{n} = \vec{i}(1(-1) - (-1)3) - \vec{j}(2(-1) - (-1)(-1)) + \vec{k}(2 \cdot 3 - 1(-1)).$$

נחשב כל רכיב:

$$1(-1) - (-1)3 = -1 + 3 = 2,$$

$$2(-1) - (-1)(-1) = -2 - 1 = -3 \Leftarrow \text{ברכיב } \vec{j} : -(-3) = 3,$$

$$2 \cdot 3 - 1(-1) = 6 + 1 = 7.$$

לכן

$$\vec{n} = (2, 3, 7).$$

כעת נשתמש בנקודה $P_0 = (1, 0, 2)$. משוואת המישור:

$$(2, 3, 7) \cdot (x - 1, y, z - 2) = 0.$$

כלומר

$$2(x - 1) + 3y + 7(z - 2) = 0.$$

נפתח:

$$2x - 2 + 3y + 7z - 14 = 0.$$

ולכן

$$\boxed{2x + 3y + 7z - 16 = 0}.$$

נבדוק שהנקודה $P = (0, 3, 1)$ נמצאת על המישור:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 1 - 16 = 0 + 9 + 7 - 16 = 0.$$

בנוסף, אם מציבים נקודה כללית מן הישר

$$(x, y, z) = (1 + 2t, t, 2 - t),$$

מקבלים

$$2(1 + 2t) + 3t + 7(2 - t) - 16 = 2 + 4t + 3t + 14 - 7t - 16 = 0.$$

כלומר כל הישר נמצא במישור.

□

ניצחון

תרגיל 1.10.9.

תארו את חיתוך הספירה

$$S: \quad (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=25$$

עם המישור

$$\pi: \quad 2x-y+2z=7.$$

האם החיתוך ריק, נקודה אחת, או מעגל? אם הוא מעגל, מצאו את מרכזו ורדיוסו.

פתרון.

עיקרון מנחה

חיתוך של ספירה ומישור נקבע לפי המרחק של מרכז הספירה מן המישור. אם המרחק גדול מהרדיוס אין חיתוך. אם הוא שווה לרדיוס יש נקודת השקה אחת. אם הוא קטן מהרדיוס החיתוך הוא מעגל.

מרכז הספירה הוא

$$C=(1,-1,2),$$

ורדיוסו הוא

$$R=5.$$

למישור יש נורמל

$$\vec{n}=(2,-1,2),$$

והוא כתוב בצורה

$$\vec{n}\cdot(x,y,z)=7.$$

נחשב את המרחק ממרכז הספירה למישור:

$$d(C,\pi)=\frac{|2\cdot 1-(-1)+2\cdot 2-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}.$$

המונה הוא

$$2+1+4-7=0.$$

לכן

$$d(C,\pi)=0.$$

כלומר מרכז הספירה נמצא על המישור. במקרה כזה החיתוך הוא מעגל שמרכזו הוא C, ורדיוסו שווה לרדיוס הספירה:

$$\boxed{C=(1,-1,2), \qquad r=5}.$$

אם רוצים פרמטריזציה מפורשת של המעגל, צריך שני וקטורי יחידה מאונכים שנמצאים בתוך המישור. נבחר

$$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1).$$

אכן
$$(2,-1,2)\cdot(1,0,-1)=2-2=0.$$
נבחר גם
$$\vec{w}=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,4,1).$$
נבדוק:
$$(2,-1,2)\cdot(1,4,1)=2-4+2=0.$$
בנוסף
$$(1,0,-1)\cdot(1,4,1)=1-1=0.$$
לכן פרמטריזציה של המעגל היא
$$\boxed{\vec{\gamma}(\theta)=(1,-1,2)+5\cos\theta\frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}+5\sin\theta\frac{(1,4,1)}{3\sqrt{2}}}.$$
□

תרגיל 1.10.10.

עבור הקבוצה
$$A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ x^2+y^2<4,\ y\geq 0\},$$
קבעו האם היא פתוחה, סגורה, קשירה. מצאו גם את הפנים A°, הסגור $\overline{A}$, והשפה ∂A.

פתרון.

עיקרון מנחה

הקבוצה היא חצי דיסקה עליונה בלי הקשת החיצונית, אבל עם הקוטר שעל ציר x. לכן היא לא פתוחה ולא סגורה.

הקבוצה כוללת את כל הנקודות בתוך המעגל ברדיוס 2, ורק בחצי המישור העליון כולל ציר x.
הפנים של A הוא אוסף הנקודות שאפשר לשים סביבן כדור קטן שכולו נשאר בתוך A. נקודות שעל ציר x אינן פנימיות, כי כל כדור סביבן יורד גם לחצי המישור $y<0$. לכן
$$\boxed{A^\circ=\{(x,y):x^2+y^2<4,\ y>0\}.}$$
הסגור של A מתקבל על ידי הוספת כל נקודות הגבול. בגלל שהתנאי $x^2+y^2<4$ חסר את המעגל החיצוני, נוסיף את הקשת החיצונית העליונה. לכן
$$\boxed{\overline{A}=\{(x,y):x^2+y^2\leq 4,\ y\geq 0\}.}$$

השפה היא
$$\partial A = \overline{A} \setminus A^{\circ}.$$
לכן השפה כוללת שני חלקים: הקשת העליונה של המעגל
$$x^2 + y^2 = 4, \qquad y \geq 0,$$
וגם הקוטר שעל ציר x:
$$y = 0, \qquad -2 \leq x \leq 2.$$
לכן
$$\boxed{\partial A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0\} \cup \{(x, 0) : -2 \leq x \leq 2\}.}$$
כעת נבדוק פתיחות וסגירות.
הקבוצה אינה פתוחה, כי למשל
$$(0, 0) \in A,$$
אבל כל כדור סביב $(0,0)$ מכיל נקודות עם $y < 0$, ולכן אינו מוכל ב-A.
הקבוצה אינה סגורה, כי למשל הנקודה
$$(0, 2)$$
היא נקודת גבול של A, אבל אינה שייכת ל-A, כי $0^2 + 2^2 = 4$ ואצל A נדרש $x^2 + y^2 < 4$.
הקבוצה קשירה ואף קשירה מסילתית. אם לוקחים שתי נקודות ב-A, אפשר לחבר אותן במסלול רציף בתוך חצי הדיסקה.

□

תרגיל 1.10.11.

עבור הקבוצה
$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(2, 0)\},$$
קבעו האם היא פתוחה, סגורה וקשירה. מצאו גם את B°, $\overline{B}$, ו-∂B.

פתרון.

עיקרון מנחה

הקבוצה היא דיסקה סגורה יחד עם נקודה מבודדת מחוץ לדיסקה. הנקודה המבודדת גורמת לקבוצה לא להיות קשירה.

החלק הראשון
$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$
הוא דיסקה סגורה. בנוסף יש נקודה בודדת:
$$(2, 0).$$

הפנים של הדיסקה הסגורה הוא הדיסקה הפתוחה:

$$\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

הנקודה $(2,0)$ אינה נקודת פנים, כי כל כדור קטן סביבה מכיל נקודות שאינן ב-B. לכן

$$\boxed{B^\circ = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}.}$$

הקבוצה B סגורה, כי דיסקה סגורה היא קבוצה סגורה, ונקודה יחידה היא קבוצה סגורה, ואיחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור. לכן

$$\boxed{\overline{B} = B.}$$

השפה היא

$$\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ.$$

לכן

$$\boxed{\partial B = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(2,0)\}.}$$

הקבוצה אינה פתוחה, כי נקודה על השפה כמו $(1,0)$ שייכת ל-B אבל כל כדור סביבה יוצא מחוץ לדיסקה.
הקבוצה אינה קשירה, כי אפשר להפריד אותה לשני חלקים זרים ולא ריקים:

$$B_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \qquad B_2 = \{(2,0)\}.$$

אין מסלול רציף בתוך B שמחבר נקודה מתוך הדיסקה אל הנקודה $(2,0)$.

□

תרגיל 1.10.12.

עבור הקבוצה

$$C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ y > x^2\},$$

קבעו האם היא פתוחה, סגורה וקשירה. מצאו את הסגור והשפה שלה.

פתרון.

עיקרון מנחה

זו הקבוצה שמעל הפרבולה $y = x^2$. מכיוון שהיא מוגדרת על ידי אי שוויון חזק של פונקציה רציפה, היא פתוחה.

נגדיר פונקציה רציפה

$$F(x,y) = y - x^2.$$

אז
$$C = \{(x,y) : F(x,y) > 0\} = F^{-1}((0,\infty)).$$
מאחר ש-$(0,\infty)$ פתוחה ב-$\mathbf{R}$, ו-F רציפה, נקבל ש-C פתוחה.
הקבוצה אינה סגורה, כי נקודות על הפרבולה $y = x^2$ הן נקודות גבול של C, אבל אינן שייכות ל-C.
למשל
$$(0,0)$$
היא נקודת גבול, כי הנקודות
$$\left(0, \frac{1}{n}\right)$$
שייכות ל-C, והן מתכנסות ל-$(0,0)$. אבל $0 = 0^2$, ולכן $(0,0) \notin C$.
הסגור הוא
$$\boxed{\overline{C} = \{(x,y) : y \geq x^2\}.}$$
השפה היא הפרבולה עצמה:
$$\boxed{\partial C = \{(x,y) : y = x^2\}.}$$
כעת נבדוק קשירות. הקבוצה C אפילו קמורה. ניקח שתי נקודות
$$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in C.$$
כלומר
$$y_1 > x_1^2, \qquad y_2 > x_2^2.$$
ניקח $0 \leq t \leq 1$, ונגדיר את הנקודה שעל הקטע ביניהן:
$$(x_t,y_t) = t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2).$$
אז
$$y_t = ty_1 + (1-t)y_2 > tx_1^2 + (1-t)x_2^2.$$
בגלל קמירות הפונקציה x^2,
$$(tx_1 + (1-t)x_2)^2 \leq tx_1^2 + (1-t)x_2^2.$$
לכן
$$y_t > x_t^2.$$
כלומר כל הקטע בין שתי הנקודות נשאר בתוך C. לכן C קמורה, ולכן קשירה מסילתית, ולכן קשירה.

$\square$

ניצחון

תרגיל 1.10.13.

עבור הקבוצה
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ xy = 0\},$$
קבעו האם היא פתוחה, סגורה וקשירה. מצאו גם את הפנים, הסגור והשפה.

פתרון.

עיקרון מנחה

התנאי $xy = 0$ אומר שלפחות אחד מהמספרים x, y הוא אפס. לכן הקבוצה היא איחוד שני הצירים.

נכתוב:
$$D = \{(x,y) : x = 0\} \cup \{(x,y) : y = 0\}.$$
כלומר D היא איחוד ציר y וציר x.
הקבוצה אינה פתוחה. למשל $(0,0) \in D$, אבל כל כדור סביב $(0,0)$ מכיל נקודות כמו $(\varepsilon, \varepsilon)$, שבהן $\varepsilon \cdot \varepsilon \neq 0$.
הפנים ריק:
$$\boxed{D^\circ = \emptyset.}$$
הסיבה היא שסביב כל נקודה על אחד הצירים, כל כדור קטן מכיל נקודות שאינן על הצירים.
הקבוצה סגורה, כי היא קבוצת האפסים של פונקציה רציפה:
$$F(x,y) = xy, \qquad D = F^{-1}(\{0\}).$$
מאחר ש-$\{0\}$ סגורה ו-F רציפה, D סגורה. לכן
$$\boxed{\overline{D} = D.}$$
השפה היא
$$\boxed{\partial D = D.}$$
כעת נבדוק קשירות. למרות שהקבוצה דקה מאוד, היא קשירה מסילתית. ניקח שתי נקודות $P, Q \in D$. אפשר לחבר את P אל הראשית לאורך הציר שעליו היא נמצאת, ואז לחבר את הראשית אל Q לאורך הציר שעליו Q נמצאת. כל המסלול נשאר בתוך איחוד הצירים. לכן D קשירה מסילתית, ולכן קשירה.

□

ניצחון

תרגיל 1.10.14.

עבור הקבוצה

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \; xy > 1\},$$

קבעו האם היא פתוחה, סגורה וקשירה. תארו את רכיבי הקשירות שלה.

פתרון.

עיקרון מנחה

האי שוויון $xy > 1$ יכול להתקיים רק כאשר x,y בעלי אותו סימן. לכן יש ענף אחד ברביע הראשון וענף אחד ברביע השלישי.

נגדיר

$$F(x,y) = xy, \qquad E = F^{-1}((1,\infty)).$$

מאחר ש-F רציפה ו-$(1,\infty)$ פתוחה, הקבוצה E פתוחה.
הקבוצה אינה סגורה. למשל הנקודות

$$\left(1+\frac{1}{n}, 1\right)$$

שייכות ל-E, אבל הן מתכנסות ל-$(1,1)$, ושם $1 \cdot 1 = 1$, ולכן $(1,1) \notin E$.
כעת נבדוק קשירות. אם $xy > 1$, אז בהכרח x ו-y שניהם חיוביים או שניהם שליליים. לכן

$$E = E_+ \cup E_-,$$

כאשר

$$E_+ = \{(x,y) : x > 0, \; y > 0, \; xy > 1\}, \qquad E_- = \{(x,y) : x < 0, \; y < 0, \; xy > 1\}.$$

שתי הקבוצות זרות, לא ריקות, ופתוחות בתוך E. לכן E אינה קשירה.

$$\boxed{E_+ = \{(x,y) : x > 0, \; y > 0, \; xy > 1\}}$$

$$\boxed{E_- = \{(x,y) : x < 0, \; y < 0, \; xy > 1\}}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.10.15.

הוכיחו כי

$$\mathbf{R} \setminus \{0\}$$

אינה קשירה, אבל
$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
קשירה מסילתית.

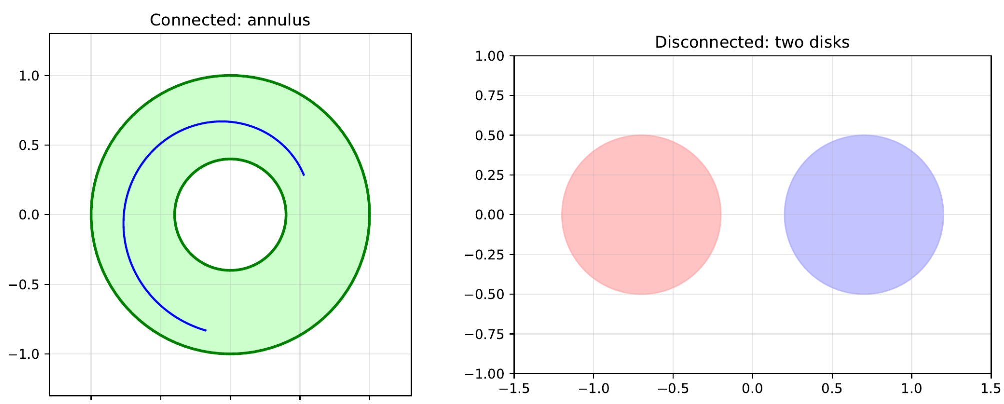
פתרון.

עיקרון מנחה

בישר, הסרת נקודה אחת קורעת את הישר לשני חלקים. במישור, אפשר לעקוף נקודה חסרה.

נתחיל ב-$\mathbf{R} \setminus \{0\}$. מתקיים
$$\mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$
שתי הקבוצות
$$(-\infty, 0), \qquad (0, \infty)$$
פתוחות בתוך $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, זרות, לא ריקות, ואיחודן הוא כל המרחב. לכן זו הפרדה, ומכאן $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ אינה קשירה.

כעת נוכיח ש-$\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ קשירה מסילתית. ניקח שתי נקודות שונות מן הראשית:
$$A, B \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$
אם הקטע הישר בין A ל-B אינו עובר דרך הראשית, אז המסלול
$$\gamma(t) = (1-t)A + tB, \qquad 0 \le t \le 1,$$
נשאר כולו בתוך $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, וסיימנו.
אם הקטע בין A ל-B כן עובר דרך הראשית, נבחר נקודה C שאינה נמצאת על הישר שעובר דרך A ו-B, וגם אינה הראשית. אז הקטע מ-A ל-C אינו עובר דרך הראשית, וגם הקטע מ-C ל-B אינו עובר דרך הראשית.
לכן אפשר לבנות מסלול שבור:
$$ACB,$$
וכל המסלול נשאר בתוך $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. מכאן שכל שתי נקודות במרחב הזה ניתנות לחיבור במסילה רציפה.



$\square$

ניצחון

תרגיל 1.10.16.

הראו שהטבעת הפתוחה
$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$
היא פתוחה וקשירה, אך אינה סגורה. מצאו את השפה שלה.

פתרון.

עיקרון מנחה

זו טבעת סביב הראשית, בין מעגל ברדיוס 1 לבין מעגל ברדיוס 2. היא פתוחה כי שני המעגלים עצמם לא בפנים.

נגדיר
$$F(x,y) = x^2 + y^2, \qquad A = F^{-1}((1,4)).$$
מאחר ש-$(1,4)$ פתוחה ב-$\mathbf{R}$, ו-F רציפה, נקבל ש-A פתוחה.
הקבוצה אינה סגורה. למשל הנקודות
$$\left(1 + \frac{1}{n}, 0\right)$$
מקיימות
$$1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 4$$
עבור n מספיק גדול, ולכן הן ב-A. אבל הן מתכנסות ל-$(1,0)$, ושם $x^2 + y^2 = 1$, ולכן $A \notin (1,0)$.
השפה מורכבת משני המעגלים:
$$\boxed{\partial A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}.}$$

כעת נבדוק קשירות. הטבעת פתוחה סביב הראשית, אבל אין בה קרע. כל שתי נקודות בטבעת אפשר לחבר על ידי מסלול שמורכב משלושה חלקים: תחילה נעים רדיאלית לרדיוס קבוע, אחר כך נעים לאורך קשת מעגלית, ואז חוזרים רדיאלית לרדיוס של הנקודה השנייה. כל עוד שומרים את הרדיוסים בין 1 ל-2, המסלול כולו נשאר בתוך A. לכן A קשירה מסילתית, ולכן קשירה.

$\square$

ניצחון

תרגיל 1.10.17.

תהי
$$K = [0,1] \cup [2,3] \subseteq \mathbf{R}.$$
קבעו האם K פתוחה, סגורה וקשירה. מצאו את K°, $\overline{K}$ ו-∂K.

פתרון.

עיקרון מנחה

זו קבוצה שמורכבת משני קטעים סגורים נפרדים. הרווח $(1,2)$ מפריד ביניהם ולכן היא אינה קשירה.

הקבוצה K היא איחוד סופי של קבוצות סגורות ב-$\mathbf{R}$. לכן היא סגורה:
$$\boxed{\overline{K} = K.}$$
היא אינה פתוחה, כי למשל $0 \in K$, אבל כל סביבה פתוחה של 0 מכילה נקודות שליליות שאינן ב-K.
גם $1,2,3$ הן נקודות שאינן פנימיות.
הפנים הוא
$$\boxed{K^\circ = (0,1) \cup (2,3).}$$
השפה היא
$$\boxed{\partial K = \{0,1,2,3\}.}$$
הקבוצה אינה קשירה. אכן,
$$K = [0,1] \cup [2,3],$$
כאשר שני החלקים זרים, לא ריקים, ויש ביניהם רווח. הקבוצות $[0,1]$ ו-$[2,3]$ הן פתוחות וסגורות בתוך K, ולכן הן יוצרות הפרדה.

$\square$

תרגיל 1.10.18.

תהי $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ פונקציה רציפה, ונתון כי
$$f(0,0) = -2, \qquad f(3,1) = 5.$$
הוכיחו שקיימת נקודה (x_0,y_0) על הקטע המחבר בין $(0,0)$ לבין $(3,1)$, כך ש-
$$f(x_0,y_0) = 0.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

משפט ערך הביניים הוא משפט חד ממדי, לכן נצמצם את הבעיה למסלול חד ממדי בין שתי הנקודות.

נבנה פרמטריזציה של הקטע בין

$$A = (0,0), \qquad B = (3,1).$$

הפרמטריזציה היא

$$\gamma(t) = (1-t)A + tB, \qquad 0 \le t \le 1.$$

מכיוון ש-$A = (0,0)$, נקבל

$$\gamma(t) = t(3,1) = (3t, t).$$

נגדיר פונקציה חד ממדית:

$$g(t) = f(\gamma(t)) = f(3t, t).$$

הפונקציה g רציפה, כי היא הרכבה של פונקציות רציפות.
כעת

$$g(0) = f(0,0) = -2, \qquad g(1) = f(3,1) = 5.$$

לכן

$$g(0) < 0 < g(1).$$

לפי משפט ערך הביניים, קיים $t_0 \in (0,1)$ כך ש-$g(t_0) = 0$. כלומר

$$f(3t_0, t_0) = 0.$$

נסמן $(x_0, y_0) = (3t_0, t_0)$. זוהי נקודה על הקטע בין $(0,0)$ לבין $(3,1)$, והיא מקיימת

$$\boxed{f(x_0, y_0) = 0}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.10.19.

תהי $A \subseteq \mathbf{R}^n$ קבוצה קשירה, ותהי $f : A \to \mathbf{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו שאם קיימות $a, b \in A$ כך ש-

$$f(a) < 0 < f(b),$$

אז קיימת נקודה $c \in A$ כך ש-

$$f(c) = 0.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

התמונה הרציפה של קבוצה קשירה היא קבוצה קשירה. קבוצות קשירות ב-$\mathbf{R}$ הן בדיוק קטעים, ולכן אם התמונה מכילה ערך שלילי וערך חיובי, היא חייבת להכיל גם את 0.

מאחר ש-A קשירה ו-f רציפה, נקבל ש-$f(A)$ קשירה ב-$\mathbf{R}$.
ידוע שכל קבוצה קשירה ב-$\mathbf{R}$ היא קטע. כלומר אם היא מכילה שני מספרים, היא מכילה גם כל מספר שנמצא ביניהם.
לפי הנתון, $f(a) < 0$ וגם $0 < f(b)$. כלומר $f(A)$ מכילה מספר שלילי ומספר חיובי. מכיוון ש-0 נמצא ביניהם, ומכיוון ש-$f(A)$ קטע, נקבל

$$0 \in f(A).$$

לכן קיימת נקודה $c \in A$ כך ש-$f(c) = 0$.

$\square$

תרגיל 1.10.20.

נתונה הפונקציה

$$f(x,y) = \frac{\ln\left(4 - x^2 - y^2\right)}{\sqrt{y - x^2}}.$$

מצאו את תחום ההגדרה של f. קבעו האם תחום ההגדרה פתוח, סגור, חסום וקשיר. מצאו את השפה של התחום.

פתרון.

עיקרון מנחה

תחום ההגדרה נקבע לפי שני תנאים: הלוגריתם דורש ביטוי חיובי, והמכנה עם שורש דורש ביטוי חיובי ממש, כי אסור לחלק באפס.

נסמן את תחום ההגדרה של הפונקציה ב-D.
יש כאן שני תנאים. ראשית, כדי שהלוגריתם יהיה מוגדר, צריך

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \Leftarrow x^2 + y^2 < 4.$$

שנית, הביטוי $\sqrt{y - x^2}$ נמצא במכנה. לכן צריך ממש

$$y - x^2 > 0 \Leftarrow y > x^2.$$

מכאן תחום ההגדרה הוא

$$\boxed{D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ x^2+y^2<4,\ y>x^2\}.}$$

כעת נבדוק האם D פתוחה. נגדיר

$$g_1(x,y)=x^2+y^2,\qquad g_2(x,y)=y-x^2.$$

שתיהן פונקציות רציפות. התחום הוא

$$D=\{(x,y):g_1<4\}\cap\{(x,y):g_2>0\}.$$

הקבוצה $\{g_1<4\}$ פתוחה, כי היא מקור של הקבוצה הפתוחה $(-\infty,4)$ תחת פונקציה רציפה. גם $\{g_2>0\}$ פתוחה. לכן D היא חיתוך של שתי קבוצות פתוחות, ולכן

$\boxed{D \text{ פתוחה.}}$

התחום אינו סגור. למשל הנקודות

$$\left(0,\frac{1}{n}\right)$$

מקיימות $x^2+y^2=1/n^2<4$ וגם $y-x^2=1/n>0$. לכן הן ב-D. אבל

$$\left(0,\frac{1}{n}\right)(0,0),$$

והנקודה $(0,0)$ אינה שייכת ל-D (כי $y>x^2$ הופך ל-$0>0$). לכן

$\boxed{D \text{ אינה סגורה.}}$

מן התנאי $x^2+y^2<4$ נקבל שכל התחום D נמצא בתוך הדיסקה ברדיוס 2. לכן

$\boxed{D \text{ חסומה.}}$

כעת נבדוק קשירות. התנאי $y>x^2$ מצריך

$$y<\sqrt{4-x^2}.$$

לכן עבור x קבוע, $x^2<y<\sqrt{4-x^2}$. כדי שיהיו נקודות בתחום, צריך $x^2<\sqrt{4-x^2}$. ריבוע: $x^4<4-x^2$, כלומר $x^4+x^2-4<0$.
אם נסמן $u=x^2$, נקבל $u^2+u-4<0$. שורשי $u^2+u-4=0$ הם $u=(-1\pm\sqrt{17})/2$. מאחר ש-$u=x^2\geq 0$, התנאי הרלוונטי הוא

$$0\leq x^2<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

לכל x כזה ערכי y יוצרים קטע פתוח. מכיוון שכל החתכים האנכיים הם קטעים, והם משתנים ברציפות, התחום הוא אזור אחד.

$\boxed{D \text{ קשיר.}}$

כעת נמצא את השפה. החלק הראשון מגיע מן המעגל בתנאי שעדיין מעל הפרבולה:

$$\{(x,y) : x^2 + y^2 = 4,\ y \geq x^2\}.$$

החלק השני מגיע מן הפרבולה בתנאי שעדיין בתוך המעגל:

$$\{(x,y) : y = x^2,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

לכן

$$\boxed{\partial D = \{x^2 + y^2 = 4,\ y \geq x^2\} \cup \{y = x^2,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.}$$

□

תרגיל 1.10.21.

נתונה הפונקציה

$$F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2z.$$

מצאו ותארו גיאומטרית את משטח הרמה

$$F(x,y,z) = 3.$$

בנוסף מצאו את המישור המשיק למשטח הרמה בנקודה $Q = (2,0,1)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

משטח רמה הוא אוסף כל הנקודות שבהן הפונקציה מקבלת אותו ערך. כדי לזהות את המשטח משלימים ריבוע. כדי למצוא מישור משיק למשטח רמה משתמשים בכך שהגרדיאנט הוא וקטור נורמל למשטח.

משטח הרמה הוא $F(x,y,z) = 3$. לכן

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2z = 3.$$

נשלים ריבוע בביטוי של z:

$$z^2 - 2z = (z-1)^2 - 1.$$

לכן המשוואה הופכת ל-

$$x^2 + 2y^2 + (z-1)^2 - 1 = 3.$$

נעביר אגף:

$$\boxed{x^2 + 2y^2 + (z-1)^2 = 4.}$$

זהו אליפסואיד שמרכזו $(0,0,1)$. נחלק ב-4:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{(z-1)^2}{4}=1.$$

חצי הציר בכיוון x הוא 2, חצי הציר בכיוון y הוא $\sqrt{2}$, וחצי הציר בכיוון z הוא 2.
נבדוק שהנקודה $Q=(2,0,1)$ על המשטח:

$$F(2,0,1)=4+0+1-2=3.\ \checkmark$$

נחשב את הגרדיאנט:

$$\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=(2x,4y,2z-2).$$

בנקודה Q:

$$\nabla F(2,0,1)=(4,0,0).$$

זהו וקטור נורמל למישור המשיק.
משוואת המישור המשיק:

$$\nabla F(Q)\cdot((x,y,z)-Q)=0.$$

כלומר

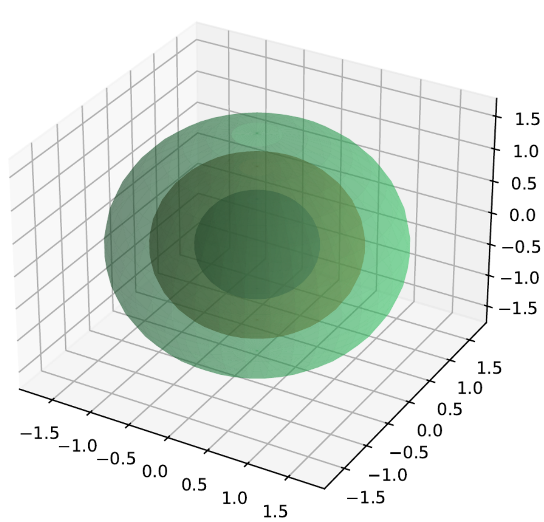
$$4(x-2)+0\cdot y+0\cdot(z-1)=0.$$

לכן $x-2=0$, כלומר

$$\boxed{x=2.}$$

כלומר המישור המשיק לאליפסואיד בנקודה $Q=(2,0,1)$ הוא המישור האנכי $x=2$.

Level surfaces of $F=x^2+y^2+z^2$ (concentric spheres)



□

ניצחון

תרגיל 1.10.22.

נתונה הפונקציה
$$f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y.$$
מצאו ותארו את קווי הגובה $f(x,y)=c$ עבור
$$c=-5,\qquad c=0,\qquad c=4.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

קו גובה הוא אוסף הנקודות במישור שבהן הפונקציה מקבלת ערך קבוע. כאן נקבל מעגלים, ולכן נזהה אותם בעזרת השלמת ריבועים.

קו גובה כללי מתקבל מן המשוואה $f(x,y)=c$. כלומר
$$x^2+y^2-2x+4y=c.$$
נשלים ריבועים:
$$x^2-2x=(x-1)^2-1,\qquad y^2+4y=(y+2)^2-4.$$
לכן
$$f(x,y)=(x-1)^2+(y+2)^2-5.$$
קו הגובה $f=c$ הוא
$$(x-1)^2+(y+2)^2-5=c \Leftarrow (x-1)^2+(y+2)^2=c+5.$$
זוהי משפחה של מעגלים שמרכזם $\boxed{(1,-2)}$. הרדיוס מקיים $r^2=c+5$.
עבור $c=-5$: $(x-1)^2+(y+2)^2=0$. סכום ריבועים שווה לאפס רק כאשר שני הריבועים שווים לאפס. לכן
$$\boxed{(x,y)=(1,-2).}$$
זהו גם ערך המינימום של הפונקציה.
עבור $c=0$:
$$\boxed{(x-1)^2+(y+2)^2=5.}$$
מעגל ברדיוס $\sqrt{5}$.
עבור $c=4$:
$$\boxed{(x-1)^2+(y+2)^2=9.}$$
מעגל ברדיוס 3.
האינטרפרטציה הגיאומטרית היא שהפונקציה מודדת את ריבוע המרחק מן הנקודה $(1,-2)$ ומחסירה 5. לכן ככל ש-c גדול יותר, קו הגובה הוא מעגל גדול יותר סביב $(1,-2)$.

□

ניצחון

1.11 עוד תרגילים

עיקרון מנחה

בשאלות מהסוג הזה עובדים תמיד באותו סדר.
קודם כול מוצאים את תחום ההגדרה. עוברים על כל פעולה בפונקציה ובודקים מה היא דורשת:

$$\sqrt{g} \quad \Leftarrow \quad g \geq 0,$$

אבל אם השורש במכנה, צריך $g > 0$. עבור לוגריתם צריך $g > 0 \Leftarrow \ln(g)$. עבור מכנה צריך מכנה $\neq 0$. עבור $\arcsin(g), \arccos(g)$ צריך $-1 \leq g \leq 1$. בסוף לוקחים את כל התנאים יחד, כלומר חיתוך של כל הדרישות.
אחר כך בודקים את התכונות של התחום: פתוח, סגור, חסום, קשיר וסימטריה ביחס לצירים.
בשאלות של קווי גובה מציבים $f(x, y) = c$ ומנסים לסדר את המשוואה לצורה גיאומטרית מוכרת.
חשוב לזכור שקו הגובה הוא רק החלק שנמצא בתוך תחום ההגדרה.
בשאלות של משטחי רמה מציבים $f(x, y, z) = c$ ומסדרים את המשוואה לצורה גיאומטרית מוכרת.
בשאלות של פונקציה למקוטעין פותרים את קו הגובה בכל תחום בנפרד.

תרגיל 1.11.1.

נתונה הפונקציה

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{x^2 + (y - 2)^2 - 1}.$$

מצאו את תחום ההגדרה המקסימלי של f. קבעו האם התחום פתוח, סגור, חסום, קשיר וסימטרי ביחס לצירים.

פתרון.

עיקרון מנחה

בודקים בנפרד את תנאי השורש ואת תנאי המכנה. לאחר מכן מתרגמים את התחום לקבוצה גיאומטרית במישור.

כדי שהשורש יהיה מוגדר, צריך

$$1 - y^2 \geq 0 \Leftarrow -1 \leq y \leq 1.$$

בנוסף, המכנה צריך להיות שונה מאפס:

$$x^2 + (y - 2)^2 \neq 1.$$

לכן תחום ההגדרה הוא

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq y \leq 1,\ x^2 + (y - 2)^2 \neq 1\}.$$

המשוואה $x^2 + (y-2)^2 = 1$ היא מעגל שמרכזו $(0, 2)$ ורדיוסו 1. בתוך הרצועה $-1 \leq y \leq 1$, מתקיים $y - 2 \leq -1$, ולכן $(y-2)^2 \geq 1$. כדי שיתקיים $x^2 + (y-2)^2 = 1$, חייבים $x = 0$ ו-$(y - 2)^2 = 1$, כלומר $y = 1$. לכן הנקודה היחידה שצריך להוציא היא $(0, 1)$.

$$\boxed{D = \{(x,y) : -1 \le y \le 1\} \setminus \{(0,1)\}.}$$

פתיחות: התחום אינו פתוח. הנקודה $(1,1)$ בתחום, אבל כל כדור סביבה מכיל נקודות עם $y > 1$.
לכן $\boxed{D \text{ אינו פתוח}}$.

סגירות: התחום אינו סגור, כי הנקודה $(0,1)$ הוצאה ממנו אבל היא נקודת גבול: הסדרה $p_n = (0, 1 - 1/n)$ ב-D ומתכנסת ל-$(0,1)$. $\boxed{D \text{ אינו סגור}}$.

חסימות: עבור $y = 0$: $(x,0) \in D$ לכל $x \in \mathbf{R}$. כאשר $x \to \infty$, הנורמה שואפת לאינסוף.
$\boxed{D \text{ אינו חסום}}$.

קשירות: ניקח שתי נקודות $A = (x_1,y_1), B = (x_2,y_2)$ בתחום. נחבר את A לנקודה $(x_1,0)$ בקטע אנכי, את $(x_1,0)$ ל-$(x_2,0)$ בקטע אופקי, ואז את $(x_2,0)$ ל-B בקטע אנכי. כל המסלול ברצועה ולא חייב לעבור דרך $(0,1)$. $\boxed{D \text{ קשיר}}$.

סימטריה ביחס לציר y: התנאים תלויים ב-x^2, לכן $(-x,y) \in D$ $(x,y) \in D$. $\boxed{\text{סימטרי ביחס לציר } y.}$

סימטריה ביחס לציר x: $(0,-1) \in D$ (כי $1 \neq 9 = 0 + 9$) אבל $(0,1) \notin D$.
$\boxed{\text{אינו סימטרי ביחס לציר } x.}$

□

ניצחון

תרגיל 1.11.2.

נתונה הפונקציה
$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{x-y}.$$
מצאו את תחום ההגדרה ואת כל קווי הגובה של הפונקציה ותארו אותם גיאומטרית.

פתרון.

עיקרון מנחה

קווי גובה מתקבלים מן המשוואה $f(x,y) = c$. כאן נקבל משפחה של מעגלים, אבל צריך לזכור להוציא את הנקודות שבהן המכנה מתאפס.

תחום ההגדרה נקבע על ידי $x - y \neq 0$:
$$\boxed{D = \{(x,y) : x \neq y\}.}$$

קו הגובה לערך c:
$$\frac{x^2+y^2-1}{x-y} = c.$$

מאחר ש-$x - y \neq 0$, נכפיל:
$$x^2+y^2-1 = c(x-y).$$

נסדר:

$$x^2 - cx + y^2 + cy = 1.$$

נשלים ריבועים:

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} + \left(y + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} = 1.$$

כלומר

$$\boxed{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2}\right)^2 = 1 + \frac{c^2}{2}.}$$

מרכז המעגל הוא $\left(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}\right)$, ורדיוסו $\sqrt{1 + c^2/2}$.
צריך להוציא נקודות שבהן $x = y$. נציב $y = x$ במשוואת המעגל: $2x^2 - 1 = 0$, כלומר $x = \pm 1/\sqrt{2}$.
לכן נקודות החיתוך עם הקו $x = y$ הן

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

לכן לכל $c \in \mathbf{R}$, קו הגובה הוא המעגל הנ"ל ללא שתי הנקודות הקבועות.

$\square$

תרגיל 1.11.3.

נתונה הפונקציה

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{1 + z^2}.$$

מצאו את תחום ההגדרה ומצאו את כל משטחי הרמה, וסווגו אותם לפי ערך הרמה c.

פתרון.

עיקרון מנחה

משטחי הרמה מתקבלים מן המשוואה $f = c$. מכיוון שהמונה והמכנה אי שליליים, הפונקציה אינה מקבלת ערכים שליליים.

המכנה $1 + z^2 \geq 1 > 0$ לעולם אינו מתאפס. לכן

$$\boxed{D = \mathbf{R}^3.}$$

משטח הרמה לערך c:

$$\frac{x^2 + y^2}{1 + z^2} = c \Leftarrow x^2 + y^2 = c(1 + z^2).$$

כלומר
$$x^2+y^2-cz^2=c.$$
מקרה $c<0$: הפונקציה אי שלילית תמיד, ולכן אין משטח רמה:

$$\boxed{c<0: \quad \text{אין משטח רמה.}}$$

מקרה $c=0$: $x^2+y^2=0 \Leftarrow x=y=0$. אין תנאי על z:

$$\boxed{c=0: \quad z \text{ציר}.}$$

מקרה $c>0$: נחלק ב-c:

$$\boxed{c>0: \quad \frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{c}-z^2=1.}$$

זוהי משוואה של היפרבולואיד חד יריעתי סביב ציר z.
החתך במישור $z=$קבוע הוא מעגל ברדיוס $\sqrt{c(1+z^2)}$, הקטן ביותר ב-$z=0$ עם רדיוס $\sqrt{c}$.

$\square$

ניצחון

תרגיל 1.11.4.

נתונה הפונקציה המוגדרת למקוטעין

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2-y, & x\le 1,\\ 3x+2y, & x>1.\end{cases}$$

מצאו ושרטטו רעיונית את קו הגובה $f(x,y)=0$. לאילו ערכי c קו הגובה $f(x,y)=c$ הוא עקום רציף?

פתרון.

עיקרון מנחה

פותרים את משוואת קו הגובה בנפרד בכל אחד מן התחומים $x\le 1$ ו-$x>1$. כדי שהעקום יהיה רציף, שני הענפים צריכים להתחבר באותו גובה כאשר $x\to 1$.

קו הגובה $f=0$:
בענף הראשון $x\le 1$: $y=x^2 \Leftarrow x^2-y=0$ - פרבולה $y=x^2,\ x\le 1$.
בענף השני $x>1$: $y=-\frac{3}{2}x \Leftarrow 3x+2y=0$ - ישר $y=-\frac{3}{2}x,\ x>1$.
ב-$x=1$, הענף השמאלי נותן $y=1$, והגבול הימני נותן $y=-3/2$. יש קפיצה, ולכן קו הגובה 0 אינו רציף.
קו הגובה הכללי: בענף הראשון: $y=x^2-c,\ x\le 1$. בענף השני: $y=(c-3x)/2,\ x>1$.

לרציפות נדרוש שערכי שני הענפים יתחברו ב-$x = 1$:

$$1 - c = \frac{c-3}{2}.$$

נכפיל ב-2:

$$2 - 2c = c - 3 \Leftarrow 5 = 3c \Leftarrow \boxed{c = \frac{5}{3}.}$$

עבור ערך זה:

$$\begin{cases} y = x^2 - \frac{5}{3}, & x \le 1, \\ y = \frac{5}{6} - \frac{3}{2}x, & x > 1. \end{cases}$$

בדיקה: ב-$x = 1$ הענף השמאלי נותן $y = -2/3$, והגבול הימני נותן $y = 5/6 - 9/6 = -4/6 = -2/3$. תואם.

□

ניצחון

תרגיל 1.11.5.

נתונה הפונקציה

$$f(x,y) = \frac{\ln\left((x-1)(y+2)\right)}{\sqrt{4-x^2}}.$$

מצאו את תחום ההגדרה המקסימלי של f. קבעו האם התחום פתוח, סגור, חסום, קשיר וסימטרי ביחס לצירים.

פתרון.

עיקרון מנחה

יש כאן שני תנאים חזקים: הלוגריתם דורש ביטוי חיובי, והמכנה עם שורש דורש ביטוי חיובי ממש.

תנאי הלוגריתם: $(x-1)(y+2) > 0$. מכפלה חיובית כאשר שני הגורמים חיוביים או שניהם שליליים:

$$(x > 1, y > -2) \quad \text{או} \quad (x < 1, y < -2).$$

תנאי המכנה: $\sqrt{4-x^2}$ במכנה, ולכן $-2 < x < 2 \Leftarrow 4 - x^2 > 0$.

חיבור התנאים:

מקרה ראשון: $1 < x < 2,\ y > -2$.

מקרה שני: $-2 < x < 1,\ y < -2$.

$$\boxed{D = ((1,2) \times (-2,\infty)) \cup ((-2,1) \times (-\infty,-2)).}$$

פתיחות: שתי הקבוצות הן מכפלות של קטעים פתוחים, ולכן פתוחות. איחוד של פתוחות פתוח: $\boxed{D \text{ פתוחה}}$.

סגירות: הנקודות $p_n = (1+1/n, 0) \in D$ ומתכנסות ל-$(1,0)$, אבל $(1,0) \notin D$ (כי $(x-1)(y+2) = 0$ שם). $\boxed{D \text{ אינו סגור}}$.

חסימות: הנקודות $(3/2, t) \in D$ לכל $t > -2$, ולכן D אינו חסום. $\boxed{D \text{ אינו חסום}}$.

קשירות: שתי הקבוצות הן זרות ולכן אין מסלול רציף בתוך D שמחבר נקודה מהאחת לשנייה (יצטרך לחצות את $x = 1$ או $y = -2$). $\boxed{D \text{ אינו קשיר}}$.

רכיבי הקשירות:

$$\boxed{D_1 = (1,2) \times (-2, \infty), \quad D_2 = (-2, 1) \times (-\infty, -2).}$$

סימטריה ביחס לצירים: בודקים $(3/2, 0) \in D$ אבל $(-3/2, 0) \notin D$; $(0, -3) \in D$ אבל $(0, 3) \notin D$.

$\boxed{D \text{ אינו סימטרי ביחס לאף ציר}}$.

□

ניצחון

