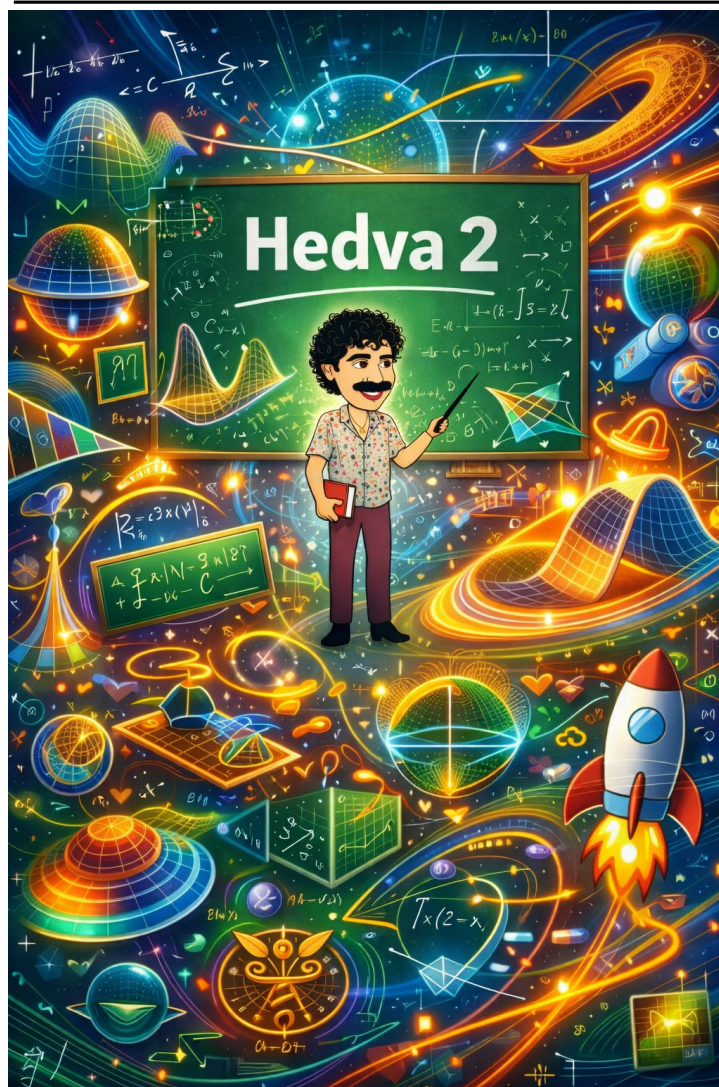


חדו"א 2 להנדסות

סיכומים ותרגולים



נערך ונכתב על ידי חן גדי

ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המצויב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

נוצר על ידי חוג גדי

תוכן העניינים

2	1 תרגול 6 – דיפרנציאביליות, גרדיאנט, שוורץ וכלל השרשרת
2	1.1 תיאוריה
13	1.2 תרגילים

תרגול 6 – דיפרנציאביליות, גרדיאנט, שוורץ וכלל השרשרת

1.1 תיאוריה

לאורך כל הפרק נניח, אלא אם נאמר אחרת, כי

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

וכי הנקודה $p_0 = (x_0, y_0)$ היא נקודת פנים של D . נסמן וקטור שינוי על ידי $h = (h_1, h_2)$, או לחלופין על ידי (h, k) . הנורמה היא הנורמה האוקלידית

$$\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}.$$

1.1.1 גבול ורציפות בנקודה

הגדרה פורמלית

גבול דו-ממדי. נאמר כי

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $(x, y) \in D$, אם

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

אז

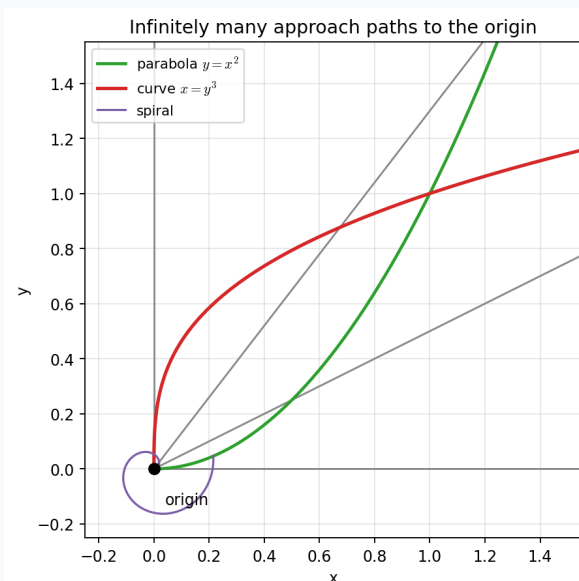
$$|f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

נאמר כי f רציפה ב- (x_0, y_0) אם הגבול קיים ושווה לערך הפונקציה:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

הערה קטנה ומועילה

הגדרה זו דורשת שליטה על כל מסלולי ההתקרבות לנקודה. בדיקה לאורך משפחה אחת של מסלולים, גם אם זו משפחה אינסופית כמו כל הישרים $y - y_0 = m(x - x_0)$, אינה מוכיחה גבול. כדי להוכיח גבול משתמשים בדרך כלל בחסם אחיד שאינו תלוי במסלול; כדי להפריך גבול מספיק למצוא שני מסלולים המובילים לערכים שונים.



מסלולי התקרבות שונים לראשית. כדי להוכיח גבול יש לשלוט בכולם, לא רק בישרים.

דוגמה 1.1.1

הוכחה פורמלית של רציפות בעזרת חסם. נגדיר

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

עבור $(x,y) \neq (0,0)$ מתקיים

$$|f(x,y)| = \frac{|x|^2 |y|}{x^2 + y^2}.$$

מאחר ש- $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ וגם $x^2 \leq x^2 + y^2$, נקבל

$$|f(x, y)| \leq \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

לכן אם נבחר $\delta = \varepsilon$, אז $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ גורר

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon.$$

מכאן f רציפה בראשית.

1.1.2 נגזרות חלקיות

הגדרה פורמלית

נגזרות חלקיות. הנגזרת החלקית לפי המשתנה x בנקודה (x_0, y_0) מוגדרת על ידי

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

אם הגבול קיים. כלומר מקפאים את y בערך y_0 , ומבצעים גזירה חד-ממדית של ההגבלה

$$x \mapsto f(x, y_0).$$

באופן דומה, הנגזרת החלקית לפי המשתנה y היא

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k},$$

כלומר מקפאים את x בערך x_0 , וגוזרים את ההגבלה

$$y \mapsto f(x_0, y).$$

עבור נגזרות מסדר שני נשתמש בשני הסימונים:

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

הערה קטנה ומועילה

נגזרות חלקיות מודדות שינוי לאורך שני צירים בלבד. לכן הן אינן מסוגלות לזהות התנהגות בעקומות אלכסוניות או לא ליניאריות. קיום f_x ו- f_y בנקודה הוא תנאי הכרחי לדיפרנציאביליות, אך אינו תנאי מספיק אפילו לרציפות.

דוגמה 1.1.2.

נגדיר

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

על הצירים מתקיים $g(h, 0) = 0$ ו- $g(0, k) = 0$, ולכן

$$g_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0, \quad g_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0.$$

אבל לאורך $y = x$ מתקיים

$$g(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

ולכן g אינה רציפה בראשית. זו הדגמה לכך שקיום שתי הנגזרות החלקיות אינו מספיק.

1.1.3 דיפרנציאביליות וקירוב ליניארי

הגדרה פורמלית

דיפרנציאביליות בנקודה, בנוסח שנשתמש בו בתרגול. נאמר כי f דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) אם הנגזרות החלקיות $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ קיימות, ומתקיים

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

בכתיב של תוספות $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, אותה הגדרה נכתבת כך:

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

הערה קטנה ומועילה

הביטוי

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

הוא הקירוב הליניארי של f ליד (x_0, y_0) . ההגדרה אומרת שהשגיאה

$$f(x, y) - L(x, y)$$

שואפת לאפס מהר יותר מן המרחק האופקי

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

כלומר לא מספיק שהשגיאה תשאף לאפס; היא צריכה להיות קטנה מסדר ראשון ביחס למרחק.

טענה 1.1.3.

ניסוח שקול בעזרת העתקה ליניארית. ההגדרה הקודמת שקולה לקיום העתקה ליניארית : L_0 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש-

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + L_0(h, k) + R(h, k), \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

במקרה כזה בהכרח

$$L_0(h, k) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

הוכחה.

נכתוב $L_0(h, k) = Ah + Bk$. נציב $k = 0$. נקבל

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = Ah + R(h, 0).$$

חלוקה ב- h נותנת

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = A + \frac{R(h, 0)}{h}.$$

כיוון ש

$$\left| \frac{R(h, 0)}{h} \right| = \frac{|R(h, 0)|}{\sqrt{h^2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

נקבל $A = f_x(x_0, y_0)$. באותו אופן, הצבת $h = 0$ נותנת $B = f_y(x_0, y_0)$. לכן ההעתקה הליניארית, אם היא קיימת, מוכרחה להיות

$$L_0(h, k) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

הערה קטנה ומועילה

דיפרנציאביליות היא טענה אחידה על כל המסלולים. היא גוררת רציפות, קיום כל הנגזרות הכיווניות ואת נוסחת הגרדיאנט. הכיוונים ההפוכים אינם נכונים בדרך כלל.

גרירות חשבות בנקודה

רק הגזרות הנכונות שבהן מותר להשתמש

✓ נגזרות חלקיות קיימות ורציפות בסביבה ← דיפרנציאביליות ✓

✓ דיפרנציאביליות ← רציפות ✓

✓ דיפרנציאביליות ← קיום נגזרות חלקיות ✓

שימו לב: הכיוונים ההפוכים אינם נכונים בדרך כלל.

דיאגרמה: החצים הירוקים הם גרירות נכונות

1.1.4 מישור משיק

הגדרה פורמלית

מישור משיק לגרף. אם f דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) , אז המישור המשיק לגרף $z = f(x, y)$ בנקודה

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

הוא

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

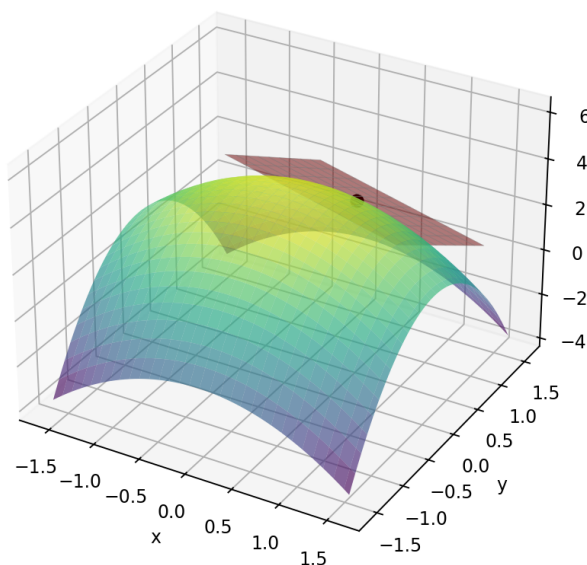
הערה קטנה ומועילה

המישור המשיק הוא ייצוג גיאומטרי של הדיפרנציאל. ההפרש בין הגרף לבין המישור הוא בדיוק השארית R , והיא מקיימת

$$\frac{|R(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0.$$

לכן מישור משיק אמיתי קיים רק כאשר f דיפרנציאבילית בנקודה.

$$z = 4 - x^2 - 2y^2 \text{ and its tangent plane at } (0.5, 0.5)$$



המשטח והמישור המשיק. הקרבה היא מסדר ראשון בלבד.

1.1.5 תנאי מספיק לדיפרנציאביליות

נגזרות חלקיות רציפות גוררות דיפרנציאביליות. אם f_x ו- f_y קיימות בסביבה של $p_0 = (x_0, y_0)$ ורציפות ב- p_0 , אז f דיפרנציאבילית ב- p_0 .

תזכורת (מההרצאה)

המשפט הוא תנאי מספיק בלבד. קיימות פונקציות דיפרנציאביליות שהנגזרות החלקיות שלהן אינן רציפות. לכן כאשר הנגזרות החלקיות אינן רציפות, אי אפשר להסיק אוטומטית שאין דיפרנציאביליות; צריך לחזור להגדרה.

1.1.6 גרדיאנט, כיוון עלייה וקווי מפלס

הגדרה פורמלית

גרדיאנט. אם $f_x(p_0)$ ו- $f_y(p_0)$ קיימות, נגדיר

$$\nabla f(p_0) = (f_x(p_0), f_y(p_0)).$$

כאשר f דיפרנציאבילית, הגרדיאנט הוא הווקטור המייצג את ההעתקה הליניארית df_{p_0} במכפלה הפנימית:

$$df_{p_0}(h, k) = f_x(p_0)h + f_y(p_0)k = \nabla f(p_0) \cdot (h, k).$$

טענה 1.1.4.

כיוון העלייה המהירה ביותר. אם f דיפרנציאבילית ב- p_0 ו- $\nabla f(p_0) \neq 0$, אז קצב העלייה המקסימלי של f ב- p_0 הוא $\|\nabla f(p_0)\|$, והוא מתקבל בכיוון

$$\hat{n}_{\max} = \frac{\nabla f(p_0)}{\|\nabla f(p_0)\|}.$$

כיוון הירידה המהירה ביותר הוא $-\hat{n}_{\max}$.

הוכחה.

לכל וקטור יחידה $\hat{n}$, לפי קושי-שוורץ,

$$D_{\hat{n}}f(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \hat{n} \leq |\nabla f(p_0) \cdot \hat{n}| \leq \|\nabla f(p_0)\| \|\hat{n}\| = \|\nabla f(p_0)\|.$$

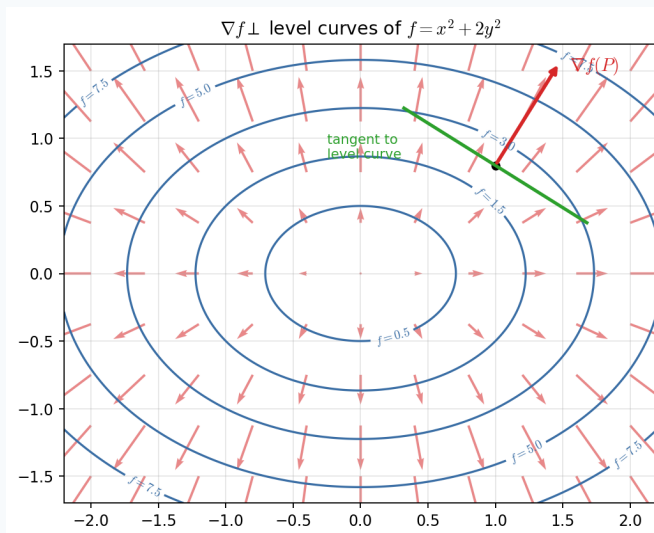
שוויון בעלייה מתקבל כאשר $\hat{n}$ מקביל ל- $\nabla f(p_0)$ ובאותו כיוון.

הערה קטנה ומועילה

אם $c = f(p_0)$ ו- $\gamma(t)$ היא עקומת מפלס עם $\gamma(0) = p_0$, כלומר $f(\gamma(t)) = c$, אז לפי כלל השרשרת

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \nabla f(p_0) \cdot \gamma'(0).$$

לכן $\nabla f(p_0)$ ניצב לכיוון המשיק של קו המפלס.



הגרדיאנט ניצב לקווי המפלס ומצביע לכיוון העלייה המהירה ביותר.

1.1.7 נגזרת כיוונית

הגדרה פורמלית

נגזרת כיוונית. יהי $\hat{n} = (n_1, n_2)$ וקטור יחידה, כלומר $\|\hat{n}\| = 1$. הנגזרת הכיוונית של f ב- $p_0 = (x_0, y_0)$ בכיוון $\hat{n}$ היא

$$D_{\hat{n}}f(p_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + t\hat{n}) - f(p_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tn_1, y_0 + tn_2) - f(x_0, y_0)}{t},$$

אם הגבול קיים.

הערה קטנה ומועילה

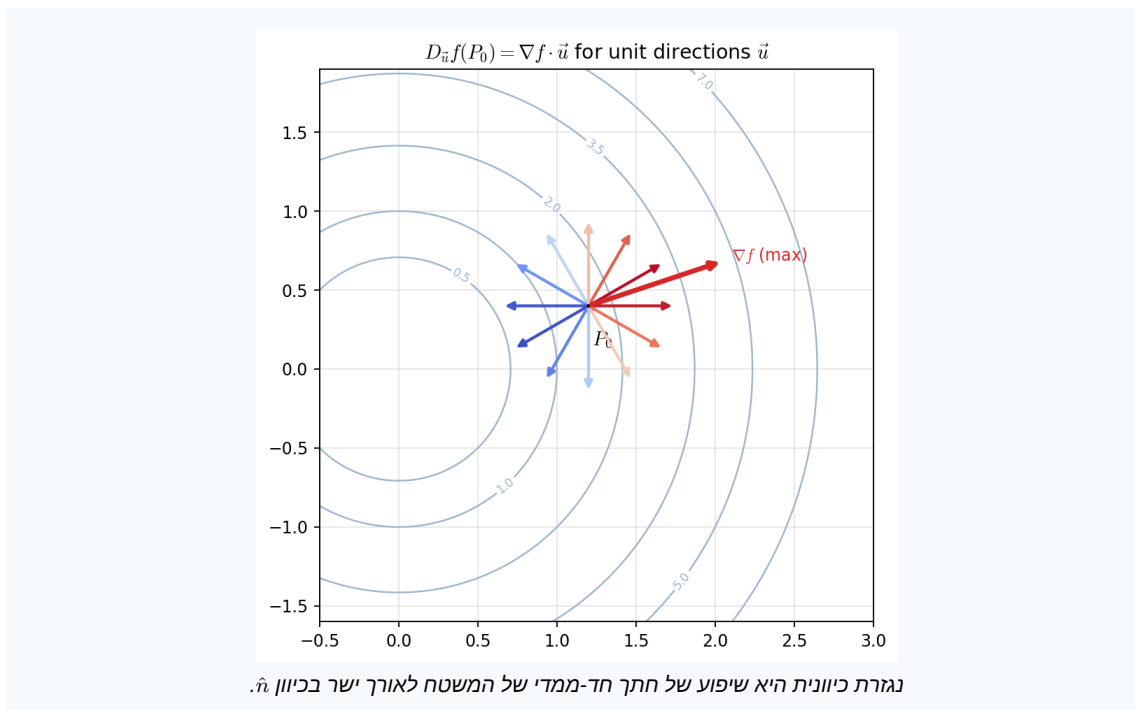
הנגזרת הכיוונית היא נגזרת של פונקציה חד-ממדית המתקבלת מן ההגבלה

$$\phi(t) = f(p_0 + t\hat{n}).$$

אם $\phi'(0)$ קיים, אז

$$D_{\hat{n}}f(p_0) = \phi'(0).$$

הדרישה ש- $\hat{n}$ יהיה וקטור יחידה חשובה: אחרת הערך תלוי במהירות שבה מתקדמים על הישר, ולא רק בכיוון הגיאומטרי.



נוסחת הגרדיאנט לנגזרת כיוונית. אם f דיפרנציאבילית ב- p_0 , אז לכל וקטור יחידה $\hat{n}$ מתקיים

$$D_{\hat{n}}f(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \hat{n}.$$

תזכורת (מההרצאה)

המשפט הוא חד-כיווני: דיפרנציאביליות גוררת את נוסחת הגרדיאנט. הוא אינו אומר שקיום כל הנגזרות הכיווניות גורר דיפרנציאביליות. לכן בנקודת תפר או בראשית של פונקציה המוגדרת בחלקים חייבים לחשב את $D_{\hat{n}}f$ מן ההגדרה, או להוכיח קודם דיפרנציאביליות, ורק אז להשתמש ב- $\nabla f \cdot \hat{n}$.

1.1.8 משפט שוורץ

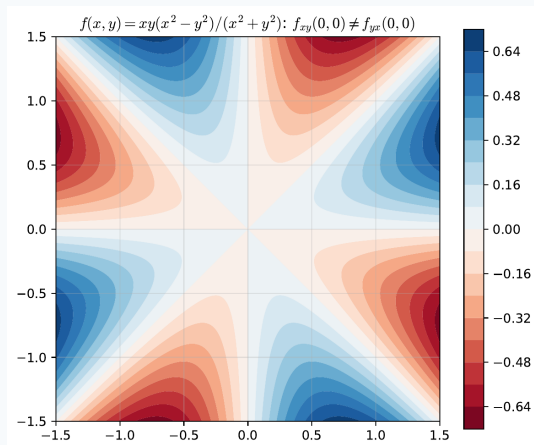
טענה 1.1.5.

משפט שוורץ. אם f_{yx} ו- f_{xy} קיימות בסביבה של p_0 ורציפות ב- p_0 , אז

$$f_{xy}(p_0) = f_{yx}(p_0).$$

הערה קטנה ומועילה

רציפות הנגזרות המעורבות היא הנחה מהותית. אם הנגזרות קיימות אך אינן רציפות, סדר הגזירה יכול להשפיע על התוצאה.



דוגמה ויזואלית לפונקציה שבה סדר הגזירה בראשית משנה את הערך.

1.1.9 כלל השרשרת

טענה 1.1.6

כלל השרשרת למסלול חד-פרמטרי. תהי f דיפרנציאבילית ב- $\gamma(t_0)$, ותהי $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ גזירה ב- t_0 . נגדיר

$$z(t) = f(x(t), y(t)) = f(\gamma(t)).$$

אז z גזירה ב- t_0 , ומתקיים

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

בסימון נגזרות חלקיות מלא:

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \frac{dy}{dt}(t_0).$$

בסימון המקוצר:

$$z'(t_0) = f_x(\gamma(t_0))x'(t_0) + f_y(\gamma(t_0))y'(t_0).$$

טענה 1.1.7.

כלל השרשרת לשני פרמטרים. אם

$$z(s, t) = f(x(s, t), y(s, t)),$$

 f דיפרנציאבילית, ו- x, y בעלות נגזרות חלקיות מתאימות, אז

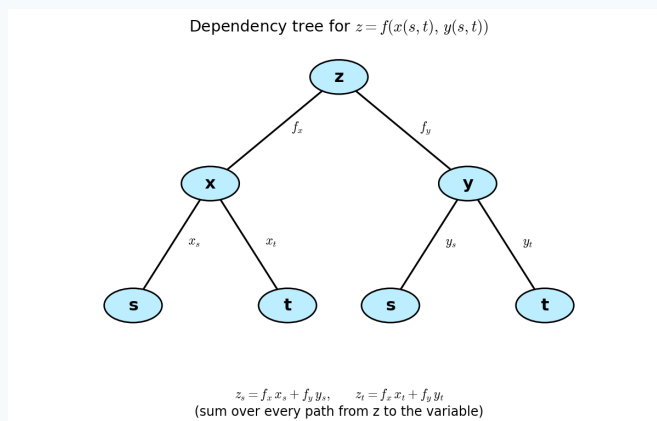
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t},$$

 כאשר $\partial f / \partial x$ ו- $\partial f / \partial y$ מחושבות בנקודה $(x(s, t), y(s, t))$. בסימון המקוצר:

$$z_s = f_x x_s + f_y y_s, \quad z_t = f_x x_t + f_y y_t.$$

הערה קטנה ומועילה

ב"תרשים/עץ תלות" (תרום גרוע מאנגלית חח), כל מסלול מן המשתנה החיצוני אל המשתנה שעליו גוזרים תורם מכפלת נגזרות. הסכום על כל המסלולים נותן את הנגזרת המבוקשת. בסימון ∂ צריך להקפיד איזה משתנה מוחזק קבוע בכל נגזרת.



עץ תלות: כל מסלול שלם תורם מכפלה, וכל הנגזרת היא סכום המסלולים.

1.2 תרגילים

1.2.1 רציפות, דיפרנציאביליות ודוגמאות נגדיות

תרגיל 1.2.1.

לכל $a > 0$ נגדיר

$$f_a(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^a}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

סווגו, כתלות ב- a , מתי f_a רציפה בראשית, מתי קיימות כל הנגזרות הכיווניות בראשית, ומתי f_a דיפרנציאבילית בראשית.

פתרון.

עיקרון מנחה

המעבר לקואורדינטות קוטביות יבודד חזקה של r . רציפות תלויה ב- r^{3-2a} , ונגזרת כיוונית או דיפרנציאביליות דורשת חלוקה נוספת ב- r .

נכתוב

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

עבור $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f_a(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \cos^2 \theta \cdot r \sin \theta}{(r^2)^a} = r^{3-2a} \cos^2 \theta \sin \theta.$$

מאחר ש-

$$|\cos^2 \theta \sin \theta| \leq 1,$$

נקבל

$$|f_a(x, y)| \leq r^{3-2a}.$$

אם

$$3 - 2a > 0,$$

כלומר

$$a < \frac{3}{2},$$

אז $r^{3-2a} \rightarrow 0$ ולכן f_a רציפה בראשית. אם $a = \frac{3}{2}$, נקבל

$$f_{3/2}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos^2 \theta \sin \theta.$$

ביטוי זה תלוי בזווית. למשל לאורך $y = 0$ מקבלים 0, ואילו לאורך הישר $y = x$, כלומר $\theta = \frac{\pi}{4}$, מקבלים

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

לכן אין גבול בראשית. אם $a > \frac{3}{2}$, הביטוי אף אינו חסום לאורך כיוונים שבהם $\cos^2 \theta \sin \theta \neq 0$. לכן

$$f_a \text{ רציפה בראשית} \iff a < \frac{3}{2}.$$

נחשב נגזרות כיוניות. יהי $\hat{n} = (n_1, n_2)$ וקטור יחידה. אז

$$f_a(tn_1, tn_2) = \frac{t^2 n_1^2 \cdot tn_2}{(t^2)^a} = t^{3-2a} n_1^2 n_2.$$

לכן

$$\frac{f_a(tn_1, tn_2) - f_a(0, 0)}{t} = t^{2-2a} n_1^2 n_2.$$

אם $a < 1$, אז $2 - 2a > 0$, ולכן הגבול הוא 0 לכל $\hat{n}$. אם $a = 1$, הגבול הוא

$$n_1^2 n_2,$$

ולכן קיים לכל $\hat{n}$. אם $a > 1$, למשל עבור $\hat{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, מתקבלת חזקה שלילית של t , ולכן הגבול אינו קיים כסופי. מכאן

$$f_a \text{ רציפה בראשית} \iff a \leq 1.$$

כעת נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה עם השבר. על הצירים מתקיים

$$f_a(h, 0) = 0, \quad f_a(0, k) = 0,$$

ולכן, כאשר הנגזרות החלקיות קיימות,

$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0.$$

לפי הגדרת הדיפרנציאביליות בראשית צריך לבדוק האם

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f_a(x, y) - f_a(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

במקרה שלנו, כאשר $a \leq 1$, זהו הגבול

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f_a(x, y)}{r}.$$

בקואורדינטות קוטביות:

$$\frac{f_a(x, y)}{r} = r^{2-2a} \cos^2 \theta \sin \theta.$$

אם $a < 1$, אז $2 - 2a > 0$, ולכן

$$|r^{2-2a} \cos^2 \theta \sin \theta| \leq r^{2-2a} \rightarrow 0.$$

לכן f_a דיפרנציאבילית בראשית.
אם $a = 1$, נקבל

$$\frac{f_1(x, y)}{r} = \cos^2 \theta \sin \theta,$$

זוהי אינו שואף לאפס באופן אחיד בזווית. למשל עבור $\theta = \frac{\pi}{4}$ מתקבל $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. לכן f_1 אינה דיפרנציאבילית בראשית. עבור $a > 1$, ממילא לא קיימות כל הנגזרות הכיווניות, ולכן אין דיפרנציאביליות מכאן

$$f_a \text{ דיפרנציאבילית בראשית} \iff a < 1.$$

טבלת הכרעה:

תחום a	רציפות	כל הנגזרות הכיווניות	דיפרנציאביליות
$0 < a < 1$	כן	כן	כן
$a = 1$	כן	כן	לא
$1 < a < \frac{3}{2}$	כן	לא	לא
$a \geq \frac{3}{2}$	לא	לא	לא

□

ניצחון

תרגיל 1.2.2.

הוכיחו ישירות מן ההגדרה כי הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

דיפרנציאבילית בראשית, אך הנגזרת החלקית $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ אינה רציפה בראשית.

פתרון.

עיקרון מנחה

זוהי דוגמה חשובה לכך שהתנאי המספיק לדיפרנציאביליות אינו תנאי הכרחי. כלומר ייתכן שפונקציה תהיה דיפרנציאבילית בנקודה, אף על פי שאחת הנגזרות החלקיות אינה רציפה באותה נקודה.

נסמן

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

כאשר $(x, y) \neq (0, 0)$, מתקיים

$$f(x, y) = r^2 \cos \frac{1}{r}.$$

נחשב תחילה את הנגזרות החלקיות בראשית לפי ההגדרה. עבור הנגזרת החלקית לפי x :

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}.$$

כאשר $h \neq 0$, מתקיים

$$r = \sqrt{h^2} = |h|,$$

ולכן

$$f(h, 0) = h^2 \cos \frac{1}{|h|}.$$

מכאן

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos(1/|h|)}{h}.$$

נחסום:

$$\left| \frac{h^2 \cos(1/|h|)}{h} \right| = |h| \left| \cos \frac{1}{|h|} \right| \leq |h| \rightarrow 0.$$

לכן

$$f_x(0, 0) = 0.$$

באופן דומה,

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k}.$$

כאשר $k \neq 0$, מתקיים

$$f(0, k) = k^2 \cos \frac{1}{|k|},$$

ולכן

$$\left| \frac{k^2 \cos(1/|k|)}{k} \right| = |k| \left| \cos \frac{1}{|k|} \right| \leq |k| \rightarrow 0.$$

מכאן

$$f_y(0, 0) = 0.$$

כעת נוכיח דיפרנציאביליות בראשית לפי ההגדרה שנלמדה בקורס. צריך להוכיח כי

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)(x - 0) - f_y(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

כבר מצאנו כי

$$f(0, 0) = 0, \quad f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0.$$

לכן מספיק לבדוק את הגבול

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

עבור $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r^2 \cos(1/r)}{r} = r \cos \frac{1}{r}.$$

נחסום:

$$\left| r \cos \frac{1}{r} \right| \leq r.$$

כאשר $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, מתקיים $r \rightarrow 0$, ולכן לפי משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} r \cos \frac{1}{r} = 0.$$

מכאן

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

ולכן f דיפרנציאבילית בראשית. נראה כעת כי f_x אינה רציפה בראשית. עבור $(x, y) \neq (0, 0)$, נחשב את $f_x(x, y)$. נכתוב

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

אז

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r}.$$

כעת

$$f(x, y) = r^2 \cos \frac{1}{r}.$$

לכן לפי כלל השרשרת, בנקודות שבהן $r > 0$:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \cos \frac{1}{r} \right).$$

נגזור כמכפלה:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial(r^2)}{\partial x} \cos \frac{1}{r} + r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos \frac{1}{r} \right).$$

מצד אחד,

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} = 2x.$$

מצד שני,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\cos \frac{1}{r} \right) = -\sin \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right).$$

מאחר ש

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (r^{-1}) = -r^{-2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3},$$

נקבל

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\cos \frac{1}{r} \right) = \frac{x}{r^3} \sin \frac{1}{r}.$$

לכן

$$f_x(x, y) = 2x \cos \frac{1}{r} + r^2 \cdot \frac{x}{r^3} \sin \frac{1}{r} = 2x \cos \frac{1}{r} + \frac{x}{r} \sin \frac{1}{r}.$$

נבדוק לאורך ציר x החיובי, כלומר $y = 0$ ו- $x > 0$. אז $r = x$, ולכן

$$f_x(x, 0) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}.$$

האיבר הראשון שואף לאפס, כי

$$\left| 2x \cos \frac{1}{x} \right| \leq 2x \rightarrow 0.$$

אבל $\sin \frac{1}{x}$ אינו מתכנס כאשר $x \rightarrow 0^+$. נגדיר

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

אז $x_n \rightarrow 0^+$, וכן

$$\sin \frac{1}{x_n} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = 1, \quad \cos \frac{1}{x_n} = 0.$$

לכן

$$f_x(x_n, 0) = 1.$$

מצד שני, נגדיר

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}.$$

אז $\tilde{x}_n \rightarrow 0^+$, וכן

$$\sin \frac{1}{\tilde{x}_n} = \sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right) = -1, \quad \cos \frac{1}{\tilde{x}_n} = 0.$$

ולכן

$$f_x(\tilde{x}_n, 0) = -1.$$

קיבלנו שתי סדרות המתקרבות לראשית, אך ערכי f_x עליהן מתקרבים לערכים שונים. לכן הגבול

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y)$$

אינו קיים. בפרט הוא אינו שווה ל- $f_x(0, 0) = 0$. מכאן f_x אינה רציפה בראשית.

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ דיפרנציאבילית בראשית, אך f אינה רציפה בראשית.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.3.

נגדיר

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. הוכיחו ש- f רציפה בראשית.
2. חשבו את $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$.
3. בדקו האם f דיפרנציאבילית בראשית.
4. הסבירו מדוע בדיקת כל הישרים אינה מספיקה להכרעה אם לא עושים חסם אחיד.

פתרון.

עיקרון מנחה

הפונקציה נבחרה כך שהמסלול $x = y^2$ מאזן את שני איברי המכנה. עם זאת, בגלל המונה, הרציפות ואף הדיפרנציאביליות מתקיימות. ההכרעה לא תבוא מבדיקת ישרים, אלא מחסם אחיד שמתאים להגדרת הדיפרנציאביליות.

ראשית נוכיח רציפות. מאחר ש- $x^2 + y^4 \geq x^2$, עבור $x \neq 0$ מתקיים

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} \leq \frac{x^2 y^2}{x^2} = y^2.$$

כאשר $x = 0$, הפונקציה שווה 0, והאי-שוויון עדיין נכון. לכן

$$0 \leq f(x, y) \leq y^2 \leq x^2 + y^2.$$

מכאן

$$|f(x, y)| \leq x^2 + y^2 \rightarrow 0,$$

ולכן f רציפה בראשית.
על ציר x :

$$f(h, 0) = 0,$$

ולכן

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

על ציר y :

$$f(0, k) = 0,$$

ולכן

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0.$$

כעת נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה. צריך לבדוק האם

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

מאחר ש

$$f(0,0) = 0, \quad f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0,$$

הביטוי הוא

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

מן החסם שמצאנו,

$$0 \leq f(x,y) \leq y^2.$$

לכן

$$0 \leq \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

כעת

$$y^2 \leq x^2 + y^2,$$

ולכן

$$\frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0.$$

לפי משפט הסנדוויץ'

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

לכן

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

ומכאן f דיפרנציאבילית בראשית. הסעיף האחרון חשוב: בדיקת ישרים בלבד לא הייתה מוכיחה דיפרנציאביליות, כי ההגדרה דורשת את כל המסלולים. מה שהוכיח דיפרנציאביליות כאן הוא החסם האחיד

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

רציפה ודיפרנציאבילית בראשית, f

□

ניצחון

תרגיל 1.2.4.

נגדיר

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

הוכיחו ישירות מן ההגדרה כי

$$F_{xy}(0, 0) \neq F_{yx}(0, 0),$$

והסבירו בדיוק איזו הנחה במשפט שוורץ נכשלת.

פתרון.

עיקרון מנחה

זוהי הדוגמה הקלאסית לכשל משפט שוורץ. צריך להיזהר: לא מספיק לגזור את הנוסחה הכללית מחוץ לראשית; הנגזרות המעורבות בראשית צריכות להיחשב לפי הגדרה.

נחשב תחילה את $F_x(0, y)$. עבור y קבוע,

$$F_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h, y) - F(0, y)}{h}.$$

אם $y \neq 0$, אז $F(0, y) = 0$, ולכן

$$F_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{hy(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} = \lim_{h \rightarrow 0} y \frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2}.$$

נעביר גבול:

$$F_x(0, y) = y \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -y.$$

גם עבור $y = 0$, ישירות $F_x(0, 0) = 0$, והנוסחה $-y$ נותנת 0. לכן

$$F_x(0, y) = -y.$$

כעת

$$F_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F_x(0, k) - F_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k - 0}{k} = -1.$$

באופן דומה נחשב $F_y(x, 0)$:

$$F_y(x, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(x, k) - F(x, 0)}{k}.$$

אם $x \neq 0$, אז

$$F_y(x, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \cdot \frac{xk(x^2 - k^2)}{x^2 + k^2} = \lim_{k \rightarrow 0} x \frac{x^2 - k^2}{x^2 + k^2} = x.$$

גם עבור $x = 0$, מתקבל 0. לכן

$$F_y(x, 0) = x.$$

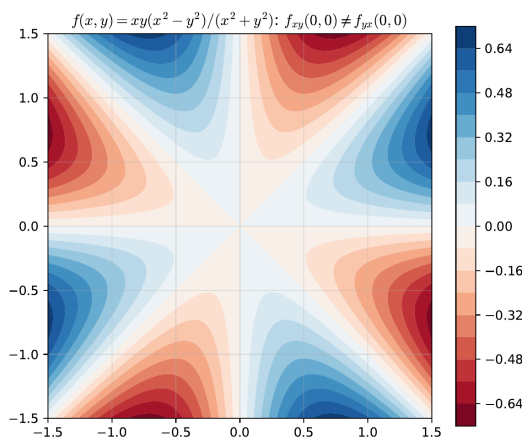
כעת

$$F_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_y(h, 0) - F_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1.$$

לכן

$$F_{xy}(0, 0) = -1 \neq 1 = F_{yx}(0, 0).$$

אין סתירה למשפט שוורץ, משום שהמשפט דורש שהנגזרות המעורבות יהיו קיימות בסביבה ויהיו רציפות בנקודה. כאן, אילו הן היו רציפות בראשית, משפט שוורץ היה מחייב שוויון. מאחר שחישבנו אי-שוויון, לפחות אחת מהנחות הרציפות נכשלת. בפועל הנגזרות המעורבות אינן רציפות בראשית.



בגרף המקורי רואים שההתנהגות סביב הראשית אינה מתיישרת לערך יחיד של נגזרת מעורבת רציפה.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.5.

מצאו את הטעות ותקנו. סטודנט כתב: "עבור

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

נקבל $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$, ולכן $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$. לכן לכל $\hat{n} = (n_1, n_2)$, $D_{\hat{n}}f(0, 0) = n_1$. אתרו את הטעות, חשבו את הנגזרת הכיוונית האמיתית, והכריעו האם f דיפרנציאבילית בראשית.

פתרון.**עיקרון מנחה**

הנגזרות החלקיות אכן חושבו נכון, אבל המסקנה על נגזרת כיוונית מניחה דיפרנציאביליות, שלא הוכחה. נחשב $D_{\hat{n}}f$ מן ההגדרה.

נתחיל מן הנגזרות החלקיות. על ציר x :

$$f(h, 0) = \frac{h^3}{h^2} = h \quad (h \neq 0),$$

ולכן

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

על ציר y :

$$f(0, k) = 0,$$

ולכן

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0.$$

עד כאן הסטודנט צדק.

כעת נחשב נגזרת כיוונית מן ההגדרה. יהי $\hat{n} = (n_1, n_2)$ וקטור יחידה. עבור $t \neq 0$:

$$f(tn_1, tn_2) = \frac{t^3 n_1^3}{t^2 n_1^2 + t^2 n_2^2} = \frac{t^3 n_1^3}{t^2 (n_1^2 + n_2^2)}.$$

מאחר ש- u יחידה,

$$n_1^2 + n_2^2 = 1.$$

לכן

$$f(tn_1, tn_2) = tn_1^3.$$

מכאן

$$D_{\hat{n}}f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tn_1, tn_2) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tn_1^3}{t} = n_1^3.$$

לכן

$$\boxed{D_{\hat{n}}f(0, 0) = n_1^3.}$$

זה אינו שווה בדרך כלל ל- n_1 . למשל עבור $\hat{n} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$:

$$D_{\hat{n}}f(0, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

ואילו

$$\nabla f(0, 0) \cdot u = (1, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

כעת נכריע דיפרנציאביליות. אם f הייתה דיפרנציאבילית, אז לכל $\hat{n}$ היה מתקיים

$$D_{\hat{n}}f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \hat{n} = n_1.$$

מצאנו כיוון שבו $n_1 \neq n_1^3$, ולכן f אינה דיפרנציאבילית בראשית. אפשר גם לראות זאת ישירות לפי הגדרת הדיפרנציאביליות עם השבר. אם f הייתה דיפרנציאבילית בראשית, אז מאחר ש

$$f(0,0) = 0, \quad f_x(0,0) = 1, \quad f_y(0,0) = 0,$$

היה צריך להתקיים

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

כלומר היה צריך להתקיים

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

נבדוק לאורך המסלול $k = h$. אז

$$f(h,h) = \frac{h^3}{h^2 + h^2} = \frac{h}{2}.$$

לכן

$$\frac{f(h,h) - h}{\sqrt{h^2 + h^2}} = \frac{\frac{h}{2} - h}{\sqrt{2}|h|} = -\frac{h}{2\sqrt{2}|h|}.$$

כאשר $h \rightarrow 0^+$, נקבל

$$-\frac{h}{2\sqrt{2}|h|} = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

ולכן הגבול אינו 0. מכאן f אינה דיפרנציאבילית.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.6.

תהי

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. הראו שכל הישרים דרך הראשית נותנים גבול 0.

2. מצאו מסלול שאורכו לראשית ועליו הגבול אינו 0.

3. קבעו האם f רציפה בראשית.

4. חשבו את הנגזרות החלקיות בראשית.

פתרון.

עיקרון מנחה

המכנה מכיל x^4 ו- y^2 . כדי לחשוף את הכשל צריך לאזן $y^2 \sim x^4$, כלומר לבחור $y = x^2$. זה בדיוק מסלול לא ישר.

לאורך ישר $y = mx$, עבור $x \neq 0$:

$$f(x, mx) = \frac{x^2(mx)}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx^3}{x^2(x^2 + m^2)} = \frac{mx}{x^2 + m^2}.$$

אם $m \neq 0$, אז כאשר $x \rightarrow 0$:

$$\frac{mx}{x^2 + m^2} \rightarrow 0.$$

אם $m = 0$, כלומר $y = 0$, אז

$$f(x, 0) = 0.$$

גם לאורך הציר $x = 0$, מתקיים

$$f(0, y) = 0.$$

לכן כל הישרים דרך הראשית נותנים גבול 0.

כעת נבחר מסלול המאזן x^4 ו- y^2 :

$$y = x^2.$$

אז

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

לכל $x \neq 0$. כאשר $x \rightarrow 0$, המסלול $(x, x^2) \rightarrow (0, 0)$, אך ערך הפונקציה נשאר $\frac{1}{2}$. לכן הגבול בראשית אינו 0, ואינו קיים.

מכאן

. אינה רציפה בראשית f

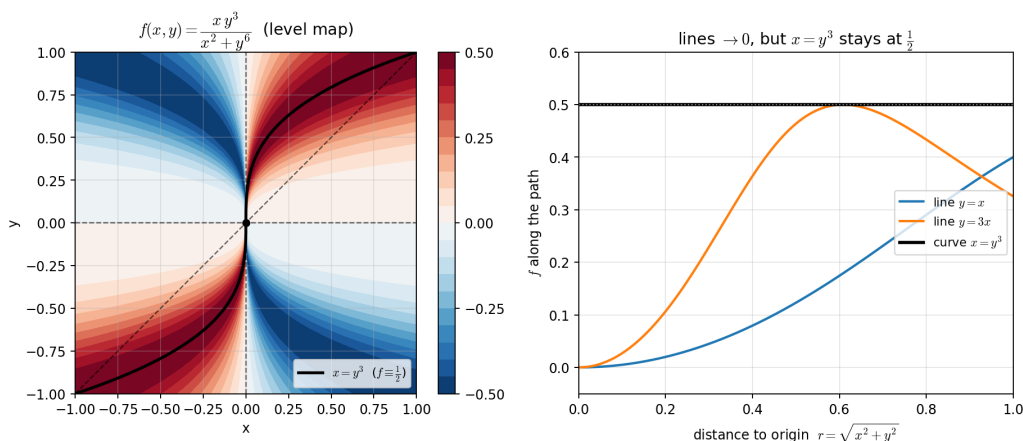
למרות זאת, הנגזרות החלקיות קיימות:

$$f(h, 0) = 0 \Rightarrow f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$f(0, k) = 0 \Rightarrow f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0.$$

לכן

. אינה רציפה ולכן אינה דיפרנציאבילית $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0,$



הגרף המקורי מדגים את אותו רעיון מתמטי: ישרים יכולים להיראות תקינים, בעוד מסלול עקום חושף ערך גבול אחר.

□

ניצחון

1.2.2 יישומי גרדיאנט ותנועה לפי שדה

1.2.7 תרגיל

נתון שדה פוטנציאל

$$U(x, y) = \frac{1}{2}((x-4)^2 + (y-1)^2) + \frac{8}{(x+1)^2 + (y-2)^2 + 1}.$$

רובוט נע לפי כלל הירידה התלולה ביותר $\gamma'(t) = -\nabla U(\gamma(t))$. בנקודה $P = (0, 0)$:

1. חשבו את $\nabla U(P)$.
2. מצאו את כיוון התנועה ההתחלתי של הרובוט ואת קצב הירידה של U .
3. הוכיחו בעזרת כלל השרשרת כי לאורך תנועה זו מתקיים $\frac{d}{dt}U(\gamma(t)) \leq 0$.
4. הסבירו מדוע $\nabla U = 0$ אינו מבטיח שהרובוט הגיע למטרה.

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו יישום של גרדיאנט וכלל השרשרת: כיוון $-\nabla U$ הוא הכיוון שמקטין את U בקצב המקסימלי. אבל גרדיאנט אפס יכול להיות מינימום מקומי שאינו המטרה.

נסמן

$$D(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + 1.$$

אז

$$U(x, y) = \frac{1}{2}((x - 4)^2 + (y - 1)^2) + 8D^{-1}.$$

נגזור:

$$U_x = (x - 4) + 8(-1)D^{-2} \cdot D_x,$$

כאשר

$$D_x = 2(x + 1).$$

לכן

$$U_x = (x - 4) - \frac{16(x + 1)}{D^2}.$$

באופן דומה,

$$D_y = 2(y - 2),$$

ולכן

$$U_y = (y - 1) - \frac{16(y - 2)}{D^2}.$$

בנקודה $(0, 0)$:

$$D(0, 0) = (1)^2 + (-2)^2 + 1 = 1 + 4 + 1 = 6, \quad D(0, 0)^2 = 36.$$

לכן

$$U_x(0, 0) = 0 - 4 - \frac{16(1)}{36} = -4 - \frac{4}{9} = -\frac{40}{9},$$

$$U_y(0, 0) = 0 - 1 - \frac{16(-2)}{36} = -1 + \frac{32}{36} = -1 + \frac{8}{9} = -\frac{1}{9}.$$

מכאן

$$\nabla U(0, 0) = \left(-\frac{40}{9}, -\frac{1}{9} \right) = -\frac{1}{9}(40, 1).$$

כיוון התנועה לפי ירידה תלולה הוא

$$-\nabla U(0, 0) = \left(\frac{40}{9}, \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{9}(40, 1).$$

וקטור היחידה בכיוון זה הוא

$$u = \frac{(40, 1)}{\sqrt{40^2 + 1^2}} = \frac{(40, 1)}{\sqrt{1601}}.$$

קצב הירידה המקסימלי הוא

$$\|\nabla U(0,0)\| = \frac{1}{9}\sqrt{1601}.$$

כלומר אם הרובוט נע במהירות יחידה בכיוון $-\nabla U$, אז

$$D_{\hat{n}}U(0,0) = -\|\nabla U(0,0)\| = -\frac{\sqrt{1601}}{9}.$$

אם הדינמיקה היא ממש

$$\gamma'(t) = -\nabla U(\gamma(t)),$$

אז לפי כלל השרשרת:

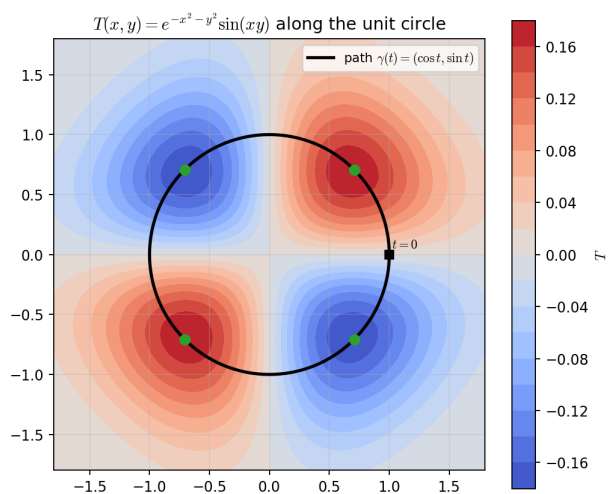
$$\frac{d}{dt}U(\gamma(t)) = \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

נציב את המשוואה הדינמית:

$$\frac{d}{dt}U(\gamma(t)) = \nabla U(\gamma(t)) \cdot (-\nabla U(\gamma(t))) = -\|\nabla U(\gamma(t))\|^2 \leq 0.$$

לכן U לא עולה לאורך המסלול.

עם זאת, $\nabla U = 0$ אומר רק שהרובוט הגיע לנקודה קריטית של הפוטנציאל. זו יכולה להיות מטרה, אבל יכולה להיות גם מינימום מקומי שנוצר בגלל איבר הדחייה מן המכשול. לכן שדות פוטנציאל עלולים ליצור מלכודות מקומיות.



האיור המקורי של שדה סקלרי משמש כאינטואיציה: תנועה לפי $-\nabla U$ יורדת על פני השדה.

□

ניצחון

1.2.3 דוגמאות נגדיות מחוץ לראשית

תרגיל 1.2.8

נגדיר פונקציה סביב הנקודה $P = (1, -2)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y+2)^3}{(x-1)^2 + (y+2)^6}, & (x, y) \neq (1, -2), \\ 0, & (x, y) = (1, -2). \end{cases}$$

1. הוכיחו שכל הנגזרות הכיווניות של f בנקודה P קיימות ושוות 0.
2. הוכיחו ש- f אינה רציפה ב- P , ולכן אינה דיפרנציאבילית ב- P .
3. פתרו שוב את סעיף אי-הרציפות בעזרת קואורדינטות קוטביות סביב P , והסבירו מדוע בדיקת זווית קבועה בלבד אינה מספיקה.

פתרון.

עיקרון מנחה

הנקודה אינה הראשית, ולכן קודם מזיזים מערכת צירים. נגדיר

$$X = x - 1, \quad Y = y + 2.$$

אז P הופכת לראשית במשתנים (X, Y) , והפונקציה היא

$$f = \frac{XY^3}{X^2 + Y^6}.$$

המבנה נבחר כך שכל ישר דרך P נראה תקין, אבל העקומה $X = Y^3$ חושפת את הכשל.

נחשב נגזרת כיוונית מן ההגדרה. יהי

$$\hat{n} = (n_1, n_2), \quad n_1^2 + n_2^2 = 1.$$

על הישר היוצא מ- P בכיוון $\hat{n}$:

$$(x, y) = P + t\hat{n} = (1 + tn_1, -2 + tn_2).$$

לכן

$$X = tn_1, \quad Y = tn_2.$$

עבור $t \neq 0$:

$$f(P + t\hat{n}) = \frac{(tn_1)(tn_2)^3}{(tn_1)^2 + (tn_2)^6}.$$

נפתח את החזקות:

$$f(P + t\hat{n}) = \frac{t^4 n_1 n_2^3}{t^2 n_1^2 + t^6 n_2^6} = \frac{t^2 n_1 n_2^3}{n_1^2 + t^4 n_2^6}.$$

אם $n_1 \neq 0$, אז

$$\frac{f(P + t\hat{n}) - f(P)}{t} = \frac{tn_1 n_2^3}{n_1^2 + t^4 n_2^6} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

אם $n_1 = 0$, אז $X = 0$, ולכן

$$f(P + t\hat{n}) = 0$$

לכל t , וממילא הנגזרת הכיוונית היא 0. לכן

$$D_{\hat{n}} f(P) = 0 \quad \text{לכל וקטור יחידה } \hat{n}.$$

כעת נבדוק רציפות בדרך רגילה. ניקח את המסלול

$$X = Y^3,$$

כלומר במשתנים המקוריים

$$x - 1 = (y + 2)^3.$$

נסמן $Y = s$, ולכן $X = s^3$. כאשר $s \rightarrow 0$, מתקיים $(x, y) \rightarrow (1, -2)$. לאורך המסלול:

$$f = \frac{XY^3}{X^2 + Y^6} = \frac{s^3 \cdot s^3}{(s^3)^2 + s^6} = \frac{s^6}{2s^6} = \frac{1}{2}.$$

אבל

$$f(P) = 0.$$

לכן הגבול של f ב- P אינו שווה ל- $f(P)$, ובפרט f אינה רציפה ב- P . מכיוון שדיפרנציאביליות גוררת רציפות, נקבל

$$P. \text{ אינה דיפרנציאבילית ב-} f$$

נפתור את אותו רעיון בקואורדינטות קוטביות מוזות:

$$X = \rho \cos \theta, \quad Y = \rho \sin \theta.$$

אז עבור $\rho > 0$:

$$f = \frac{(\rho \cos \theta)(\rho \sin \theta)^3}{(\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^6}.$$

נפתח:

$$f = \frac{\rho^4 \cos \theta \sin^3 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^6 \sin^6 \theta} = \frac{\rho^2 \cos \theta \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta + \rho^4 \sin^6 \theta}.$$

אם θ קבועה ו- $\cos \theta \neq 0$, אז המכנה שואף ל- $\cos^2 \theta$, ולכן $f \rightarrow 0$. גם אם $\theta = \frac{\pi}{2}$, מתקיים $X = 0$, ולכן $f = 0$. מכאן שכל קרן ישרה נותנת 0.אבל זה עדיין לא מוכיח רציפות, כי מסלול כללי בקוטביות יכול לכלול זווית תלויה ב- ρ . לאורך המסלול מתקיים $X = Y^3$

$$\rho \cos \theta = (\rho \sin \theta)^3,$$

כלומר

$$\cos \theta = \rho^2 \sin^3 \theta.$$

הזווית אינה קבועה. הצבה במסלול הזה כבר הראתה כי

$$f \equiv \frac{1}{2}.$$

לכן גם בקוטביות רואים שהכשל אינו מתגלה בזוויות קבועות, אלא בזווית המשתנה עם ρ .

כל הנגזרות הכיווניות קיימות, אבל אין רציפות ואין דיפרנציאביליות.

□

ניצחון

1.2.4 נגזרות כיווניות, גרדיאנט וירידה תלולה

1.2.9 תרגיל

נגדיר

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x^2+y^2)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. עבור

$$\hat{n} = (\cos \theta, \sin \theta),$$

חשבו מן ההגדרה את הנגזרת הכיוונית

$$D_{\hat{n}} f(0, 0).$$

2. הכריעו האם f דיפרנציאבילית בראשית.

פתרון.

עיקרון מנחה

הבדיקה הראשונה נעשית רק לאורך ישרים היוצאים מן הראשית. לעומת זאת, כדי להכריע דיפרנציאביליות נבדוק תחילה רציפות, כי דיפרנציאביליות גוררת רציפות. אם הרציפות נכשלת, אין צורך להמשיך לבדוק את גבול הדיפרנציאביליות.

נחשב את הנגזרת הכיוונית בכיוון

$$\hat{n} = (\cos \theta, \sin \theta).$$

לפי ההגדרה,

$$D_{\hat{n}}f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \theta, t \sin \theta) - f(0,0)}{t}.$$

מאחר ש

$$f(0,0) = 0,$$

נקבל

$$D_{\hat{n}}f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \theta, t \sin \theta)}{t}.$$

עבור $t \neq 0$,

$$f(t \cos \theta, t \sin \theta) = e^{-((t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^2)} \frac{(t \cos \theta)(t \sin \theta)^3}{(t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^6}.$$

נחשב כל חלק בנפרד:

$$(t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^2 = t^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = t^2.$$

לכן

$$e^{-((t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^2)} = e^{-t^2}.$$

כמו כן,

$$(t \cos \theta)(t \sin \theta)^3 = t \cos \theta \cdot t^3 \sin^3 \theta = t^4 \cos \theta \sin^3 \theta,$$

וגם

$$(t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^6 = t^2 \cos^2 \theta + t^6 \sin^6 \theta = t^2 (\cos^2 \theta + t^4 \sin^6 \theta).$$

לכן

$$f(t \cos \theta, t \sin \theta) = e^{-t^2} \frac{t^4 \cos \theta \sin^3 \theta}{t^2 (\cos^2 \theta + t^4 \sin^6 \theta)} = e^{-t^2} \frac{t^2 \cos \theta \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta + t^4 \sin^6 \theta}.$$

ולכן

$$\frac{f(t \cos \theta, t \sin \theta)}{t} = e^{-t^2} \frac{t \cos \theta \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta + t^4 \sin^6 \theta}.$$

נפריד לשני מקרים.

אם

$$\cos \theta \neq 0,$$

אז

$$\cos^2 \theta + t^4 \sin^6 \theta \xrightarrow{t \rightarrow 0} \cos^2 \theta \neq 0,$$

ואילו

$$e^{-t^2} t \cos \theta \sin^3 \theta \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

לכן

$$D_{\hat{n}}f(0,0) = 0.$$

אם

$$\cos \theta = 0,$$

אז

$$t \cos \theta = 0,$$

ולכן

$$f(t \cos \theta, t \sin \theta) = f(0, t \sin \theta) = 0.$$

מכאן

$$\frac{f(t \cos \theta, t \sin \theta)}{t} = 0,$$

ולכן גם במקרה זה

$$D_{\hat{n}} f(0, 0) = 0.$$

בסך הכול,

$$D_{(\cos \theta, \sin \theta)} f(0, 0) = 0 \quad \text{לכל } \theta \in \mathbb{R}.$$

כעת נכריע האם f דיפרנציאבילית בראשית. לפני בדיקת דיפרנציאביליות נבדוק רציפות, כי אם f אינה רציפה בראשית, אז בוודאי אינה דיפרנציאבילית בראשית. לאורך הציר $y = 0$, עבור $x \neq 0$, מתקיים

$$f(x, 0) = e^{-x^2} \frac{x \cdot 0^3}{x^2 + 0^6} = 0.$$

לכן

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0.$$

לעומת זאת, נבדוק את המסלול

$$x = y^3.$$

כאשר $y \rightarrow 0$, מתקיים

$$(y^3, y) \rightarrow (0, 0).$$

עבור $y \neq 0$,

$$f(y^3, y) = e^{-((y^3)^2 + y^2)} \frac{(y^3)y^3}{(y^3)^2 + y^6}.$$

נחשב:

$$(y^3)^2 + y^2 = y^6 + y^2,$$

$$(y^3)y^3 = y^6,$$

וגם

$$(y^3)^2 + y^6 = y^6 + y^6 = 2y^6.$$

לכן

$$f(y^3, y) = e^{-(y^6 + y^2)} \frac{y^6}{2y^6} = \frac{1}{2} e^{-(y^6 + y^2)}.$$

כאשר $y \rightarrow 0$,

$$e^{-(y^6 + y^2)} \rightarrow e^0 = 1.$$

ולכן

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^3, y) = \frac{1}{2}.$$

קיבלנו שני מסלולים אל הראשית:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0,$$

אבל

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^3, y) = \frac{1}{2}.$$

לכן הגבול

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

אינו קיים. בפרט f אינה רציפה בראשית.
מאחר שדיפרנציאביליות גוררת רציפות, נקבל מיד

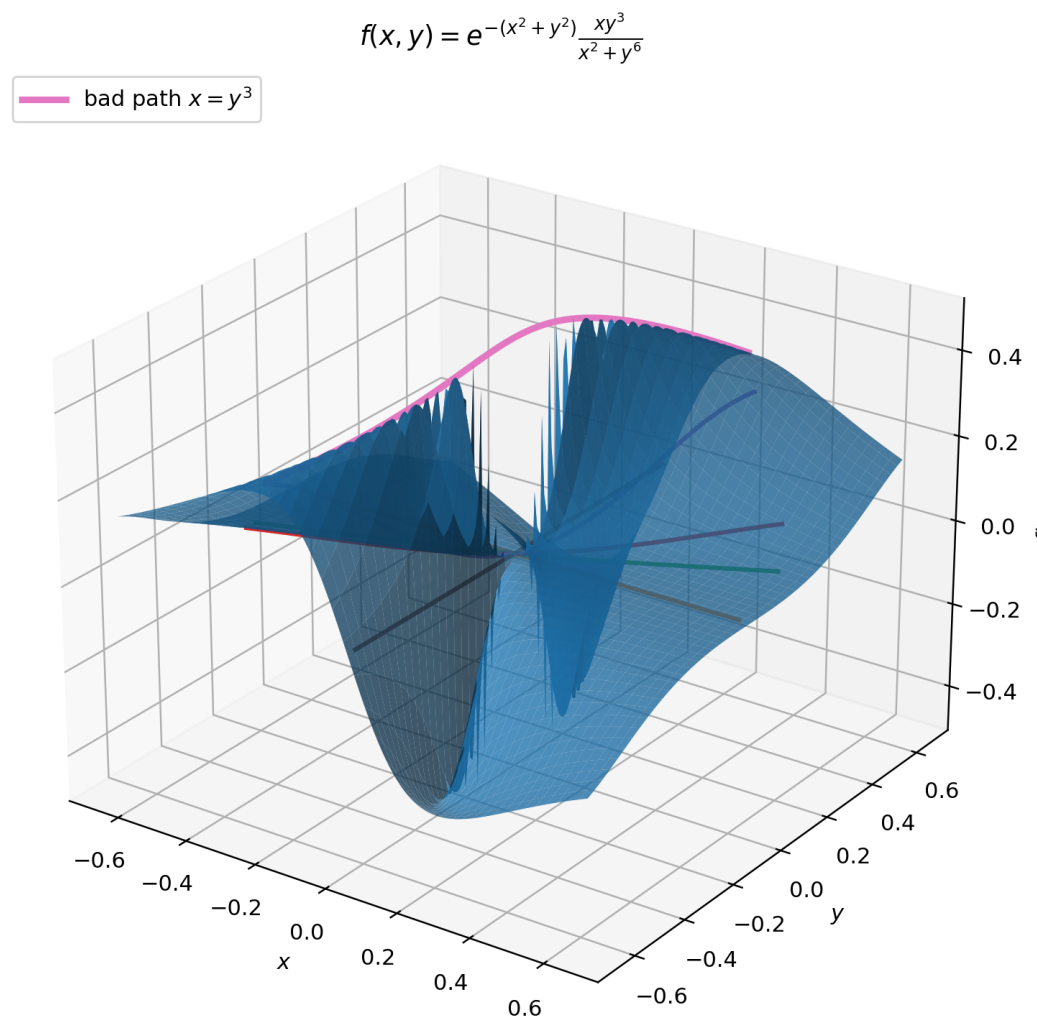
אינה דיפרנציאבילית בראשית. f

לכן בדוגמה זו כל הנגזרות הכיווניות בראשית קיימות ושוות 0, אבל f אינה רציפה בראשית, ולכן אינה דיפרנציאבילית בראשית.

□

ניצחון

ניצחון גדי



איור עזר לתרגיל: לאורך קרניים ישירות מן הראשית בודקים נגזרות כיוונית, ואילו המסלול העקום $x = y^3$ חושף את אי-הרציפות.

תרגיל 1.2.10

תהא $f(x, y) = e^x \sin(y)$, חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(3, 4)$ עבור $\hat{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

פתרון.

נוכח קודם כל שפונקציה- $f(x, y)$ רציפה בנקודה- $(3, 4)$ דרך רציפות נגזרות חלקיות :

$$\begin{aligned} f_x(3, 4) &= e^x \sin(y)|_{(x,y)=(3,4)} = e^3 \sin(4) \\ f_y(3, 4) &= e^x \cos(y)|_{(x,y)=(3,4)} = e^3 \cos(4) \end{aligned}$$

אז ע"י הגדרדיאנט $\nabla f(3, 4)$, מקבלים:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(3, 4) = \left\langle \begin{pmatrix} e^3 \sin(4) \\ e^3 \cos(4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} (e^3 \sin(4) + e^3 \cos(4))$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.11

תהי:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3x + 4y, & x \neq 0 \\ 4y, & x = 0 \end{cases}$$

א. עבור אילו ערכים של m אי-השוויון $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0, 0) < m$ מתקיים לכל וקטור יחידה $\vec{n}$?
 ב. מצא וקטור יחידה $\vec{n}$ כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0, 0) = 0$.

פתרון.

נחשב את הנגזרת החלקית ב- $(0, 0)$ לפי ההגדרה:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) + 3h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) + 3 = -3$$

נבדוק את $f'_y(0, 0)$ לפי ההגדרה האם הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$:

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - 0}{h} = 4$$

כעת נחשב האם הפונקציה דיפרנציאבילית לפי:

$$\Delta x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right) + 3\Delta x + 4\Delta y = 3\Delta x + 4\Delta y + \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

כאשר:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{\Delta x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq \left| \frac{|\Delta x|^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq |\Delta x| \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$$

לכן הפונקציה דיפרנציאבילית, ונוכל להשתמש בנוסחת הנגזרת הכיוונית:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n}$$

גרדיאנט הפונקציה בנקודה $(0, 0)$:

$$\nabla f = 3\hat{i} + 4\hat{j} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

הערך המקסימלי של נגזרת כיוונית הוא 5, והוא מתקבל כאשר $\vec{n}$ בכיוון הגרדיאנט. לכן: אם $m > 5$, אז $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0, 0) < m$ לכל יחידה $\vec{n}$.
ב. כדי לקבל נגזרת כיוונית אפס, נבחר $\vec{n}$ מאונך לגרדיאנט:

$$\nabla f = 3\hat{i} + 4\hat{j} \Rightarrow \vec{n} = \frac{-4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0, 0) = \nabla f \cdot \vec{n} = 0$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.12

יהי $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ שדה גבהים חלק, כלומר $F \in C^1$, ונניח שבנקודה

$$P_0 = (x_0, y_0)$$

מתקיים

$$\nabla F(P_0) \neq \vec{0}.$$

חלקיק נמצא בנקודה P_0 , ורוצים לבחור כיוון תנועה יחידתי $\hat{n}$ כך שהגובה יקטן בקצב הגדול ביותר.

1. הוכיחו כי הנגזרת הכיוונית של F בכיוון $\hat{n}$ נתונה על ידי

$$D_{\hat{n}}F(P_0) = \nabla F(P_0) \cdot \hat{n}.$$

2. הוכיחו כי הכיוון שבו F יורדת בקצב הגדול ביותר הוא

$$\hat{n}_{\min} = -\frac{\nabla F(P_0)}{\|\nabla F(P_0)\|}.$$

3. הסיקו מכך את צורת הצעד האלגוריתמי של Descent: Gradient

$$P_{k+1} = P_k - \eta \nabla F(P_k),$$

כאשר $\eta > 0$ הוא גודל צעד קטן.

4. נניח בנוסף כי $F \in C^2$ בסביבה של P_0 . הוכיחו פורמלית, בעזרת פיתוח טיילור מסדר שני, שאם $\eta > 0$ מספיק קטן אז

$$F(P_0 - \eta \nabla F(P_0)) < F(P_0).$$

פתרון.

עיקרון מנחה

הגרדיאנט הוא האובייקט שמרכז את כל המידע מסדר ראשון. כאשר הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה, שינוי קטן בכיוון $\hat{n}$ נקבע מסדר ראשון על ידי המכפלה הפנימית עם הגרדיאנט. לכן כיוון העלייה המהירה ביותר הוא כיוון הגרדיאנט, וכיוון הירידה המהירה ביותר הוא הכיוון ההפוך.

נסמן

$$P_0 = (x_0, y_0), \quad \hat{n} = (n_1, n_2), \quad \|\hat{n}\| = 1.$$

מאחר ש- $F \in C^1$, הנגזרות החלקיות

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

קיימות ורציפות בסביבה של P_0 . לכן לפי התנאי המספיק לדיפרנציאביליות, F דיפרנציאבילית ב- P_0 . נשתמש כעת רק בהגדרת הדיפרנציאביליות בעזרת הגבול:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0) - F_x(x_0, y_0)h - F_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

נחשב את הנגזרת הכיוונית לפי ההגדרה. עבור $t \neq 0$ נציב

$$h = tn_1, \quad k = tn_2.$$

אז

$$\sqrt{h^2 + k^2} = \sqrt{t^2 n_1^2 + t^2 n_2^2} = |t| \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = |t|.$$

לכן מן הגבול של הדיפרנציאביליות נקבל

$$\frac{F(x_0 + tn_1, y_0 + tn_2) - F(x_0, y_0) - tF_x(x_0, y_0)n_1 - tF_y(x_0, y_0)n_2}{|t|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

מאחר שהגורם $\frac{|t|}{t}$ חסום בערך מוחלט על ידי 1, נקבל גם

$$\frac{F(x_0 + tn_1, y_0 + tn_2) - F(x_0, y_0) - tF_x(x_0, y_0)n_1 - tF_y(x_0, y_0)n_2}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

כעת נפרק את מנת הנגזרת הכיוונית:

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + tn_1, y_0 + tn_2) - F(x_0, y_0)}{t} &= F_x(x_0, y_0)n_1 + F_y(x_0, y_0)n_2 \\ &+ \frac{F(x_0 + tn_1, y_0 + tn_2) - F(x_0, y_0) - tF_x(x_0, y_0)n_1 - tF_y(x_0, y_0)n_2}{t}. \end{aligned}$$

האיבר האחרון שואף לאפס, ולכן

$$D_{\hat{n}}F(P_0) = F_x(P_0)n_1 + F_y(P_0)n_2.$$

מכיוון ש

$$\nabla F(P_0) = (F_x(P_0), F_y(P_0)),$$

קיבלנו

$$D_{\hat{n}}F(P_0) = \nabla F(P_0) \cdot \hat{n}.$$

כעת נמצא את הכיוון שבו הירידה היא הגדולה ביותר. לפי אי שוויון קושי שזורץ,

$$\nabla F(P_0) \cdot \hat{n} \geq -\|\nabla F(P_0)\| \|\hat{n}\|.$$

כיוון ש- $\|\hat{n}\|=1$, נקבל

$$D_{\hat{n}}F(P_0) = \nabla F(P_0) \cdot \hat{n} \geq -\|\nabla F(P_0)\|.$$

שוויון מתקבל כאשר $\hat{n}$ מקביל ל- $\nabla F(P_0)$ ובכיוון ההפוך, כלומר כאשר

$$\hat{n} = -\frac{\nabla F(P_0)}{\|\nabla F(P_0)\|}.$$

לכן הכיוון שבו F יורדת בקצב הגדול ביותר הוא

$$\hat{n}_{\min} = -\frac{\nabla F(P_0)}{\|\nabla F(P_0)\|}.$$

הקצב בכיוון זה הוא

$$D_{\hat{n}_{\min}}F(P_0) = \nabla F(P_0) \cdot \left(-\frac{\nabla F(P_0)}{\|\nabla F(P_0)\|}\right) = -\frac{\|\nabla F(P_0)\|^2}{\|\nabla F(P_0)\|} = -\|\nabla F(P_0)\|.$$

מכאן נובע הכלל האלגוריתמי. אם רוצים להקטין את F , נעים בכיוון ההפוך לגרדיאנט. במקום לבחור רק כיוון יחידה, בוחרים צעד בגודל $\eta > 0$:

$$P_1 = P_0 - \eta \nabla F(P_0).$$

באופן איטרטיבי מתקבל

$$P_{k+1} = P_k - \eta \nabla F(P_k).$$

אם

$$P_k = (x_k, y_k),$$

אז

$$x_{k+1} = x_k - \eta \frac{\partial F}{\partial x}(x_k, y_k),$$

$$y_{k+1} = y_k - \eta \frac{\partial F}{\partial y}(x_k, y_k).$$

כלומר האלגוריתם משתמש בנגזרות החלקיות כדי לדעת לאיזה כיוון להזיז את הנקודה כך שערך הפונקציה ירד.

נוכיח כעת שהצעד אכן מוריד את הערך של F , כאשר η מספיק קטן. נסמן

$$g = \nabla F(P_0).$$

לפי ההנחה,

$$g \neq \vec{0}.$$

הצעד הוא

$$P_\eta = P_0 - \eta g.$$

לפי פיתוח טיילור מסדר שני סביב P_0 , עבור $\eta \rightarrow 0^+$:

$$F(P_0 - \eta g) = F(P_0) + \nabla F(P_0) \cdot (-\eta g) + \frac{\eta^2}{2} g^T H_F(P_0) g + o(\eta^2).$$

כיוון ש- $g = \nabla F(P_0)$, האיבר הליניארי הוא

$$\nabla F(P_0) \cdot (-\eta g) = -\eta g \cdot g = -\eta \|g\|^2.$$

לכן

$$F(P_0 - \eta g) - F(P_0) = -\eta \|g\|^2 + \frac{\eta^2}{2} g^T H_F(P_0) g + o(\eta^2).$$

נחלק ב- $\eta > 0$:

$$\frac{F(P_0 - \eta g) - F(P_0)}{\eta} = -\|g\|^2 + \frac{\eta}{2} g^T H_F(P_0) g + o(\eta).$$

ולכן

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{F(P_0 - \eta g) - F(P_0)}{\eta} = -\|g\|^2 < 0.$$

מכאן שלכל $\eta > 0$ מספיק קטן מתקיים

$$F(P_0 - \eta g) - F(P_0) < 0,$$

כלומר

$$F(P_0 - \eta \nabla F(P_0)) < F(P_0).$$

המשמעות היא שהגרדיאנט נותן כלל פעולה חישובי: בכל צעד מחשבים את כיוון העלייה המהירה ביותר, ואז הולכים בכיוון ההפוך כדי להוריד את ערך הפונקציה.

□

ניצחון

1.2.5 מישור משיק, קירוב ליניארי וקווי מפלס

תרגיל 1.2.13

תהי

$$f(x, y) = e^{xy} + x^2 \cos y.$$

1. הוכיחו שמותר להשתמש בנוסחת המישור המשיק בכל נקודה.
2. מצאו את המישור המשיק לגרף $z = f(x, y)$ בנקודה $(1, 0)$.
3. קרבו את $f(1.02, -0.03)$ בעזרת הקירוב הליניארי.
4. חשבו את השגיאה עד סדר שני, כלומר השוו עם פיתוח טיילור עד האיברים הריבועיים.

פתרון.

עיקרון מנחה

הפונקציה מורכבת מפונקציות אלמנטריות חלקות, ולכן היא C^∞ . לכן מותר להשתמש במישור משיק ובקירוב ליניארי. החלק האחרון בודק מה הקירוב הליניארי משמיט.

נחשב תחילה את הערך ואת הנגזרות החלקיות:

$$f(1, 0) = e^0 + 1^2 \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

נגזרת לפי x :

$$f_x(x, y) = ye^{xy} + 2x \cos y.$$

לכן

$$f_x(1, 0) = 0 \cdot e^0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

נגזרת לפי y :

$$f_y(x, y) = xe^{xy} - x^2 \sin y.$$

לכן

$$f_y(1, 0) = 1 \cdot e^0 - 1^2 \cdot 0 = 1.$$

מאחר ש- f_x, f_y רציפות בכל $\mathbb{R}^2$, התנאי המספיק לדיפרנציאביליות מתקיים בכל נקודה. המישור המשיק בנקודה $(1, 0)$ הוא

$$z = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0),$$

ולכן

$$z = 2 + 2(x - 1) + y.$$

לקירוב $f(1.02, -0.03)$ נציב

$$\Delta x = 1.02 - 1 = 0.02, \quad \Delta y = -0.03 - 0 = -0.03.$$

לכן

$$f(1.02, -0.03) \approx 2 + 2(0.02) + 1(-0.03) = 2 + 0.04 - 0.03 = 2.01.$$

כדי להבין את השגיאה עד סדר שני, נפתח סביב $(1, 0)$. נסמן $x = 1 + h$, $y = k$. אז

$$xy = (1 + h)k = k + hk.$$

עד סדר שני,

$$e^{xy} = 1 + (k + hk) + \frac{1}{2}(k + hk)^2 + o(h^2 + k^2).$$

מאחר ש- $(k + hk)^2 = k^2 + 2hk^2 + h^2k^2$, ורק k^2 הוא מסדר שני, נקבל

$$e^{xy} = 1 + k + hk + \frac{1}{2}k^2 + o(h^2 + k^2).$$

כמו כן

$$x^2 \cos y = (1 + h)^2 \left(1 - \frac{k^2}{2} + o(k^2) \right).$$

נפתח:

$$(1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2,$$

ולכן, עד סדר שני,

$$x^2 \cos y = (1 + 2h + h^2) \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) + o(h^2 + k^2) = 1 + 2h + h^2 - \frac{k^2}{2} + o(h^2 + k^2),$$

כי האיברים hk^2 ו- h^2k^2 הם מסדר גבוה יותר. לכן

$$f(1 + h, k) = 2 + 2h + k + h^2 + hk + \left(\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k^2 \right) + o(h^2 + k^2),$$

כלומר

$$f(1 + h, k) = 2 + 2h + k + h^2 + hk + o(h^2 + k^2).$$

עבור $h = 0.02$, $k = -0.03$, התיקון הריבועי הוא

$$h^2 + hk = (0.02)^2 + (0.02)(-0.03) = 0.0004 - 0.0006 = -0.0002.$$

לכן

$$f(1.02, -0.03) = 2.01 - 0.0002 + o(0.02^2 + 0.03^2) \approx 2.0098.$$

$-0.0002 =$ תיקון ריבועי משוער	$2.01,$ הקירוב הליניארי נותן
--------------------------------	------------------------------

□

ניצחון

תרגיל 1.2.14

תהי פונקציית הטמפרטורה במרחב הבא:

$$T(x, y) = 60 - 3x^2 + 2xy - y^2.$$

חיישן נמצא בנקודה $P = (1, -2)$.

1. חשבו את הגרדיאנט בנקודה.
2. מצאו את כיוון העלייה המהירה ביותר ואת קצב העלייה המקסימלי.
3. מצאו כיוון יחידה שבו הטמפרטורה אינה משתנה מסדר ראשון.
4. חשבו את הנגזרת הכיוונית בכיוון מן P אל $Q = (5, 1)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

הפונקציה פולינומית, ולכן דיפרנציאבילית. כל הנגזרות הכיווניות יחושבו באמצעות $D_{\hat{n}}T = \nabla T \cdot \hat{n}$, אבל רק לאחר שהצדקנו דיפרנציאביליות.

מאחר ש- T פולינומית, $T \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ולכן T דיפרנציאבילית בכל נקודה. נחשב:

$$T_x(x, y) = -6x + 2y, \quad T_y(x, y) = 2x - 2y.$$

בנקודה $P = (1, -2)$:

$$T_x(1, -2) = -6 \cdot 1 + 2(-2) = -6 - 4 = -10,$$

$$T_y(1, -2) = 2 \cdot 1 - 2(-2) = 2 + 4 = 6.$$

לכן

$$\nabla T(1, -2) = (-10, 6).$$

כיוון העלייה המהירה ביותר הוא

$$\hat{n}_{\max} = \frac{\nabla T(1, -2)}{\|\nabla T(1, -2)\|}.$$

נחשב את הנורמה:

$$\|\nabla T(1, -2)\| = \sqrt{(-10)^2 + 6^2} = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}.$$

לכן

$$\hat{n}_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{34}}(-10, 6) = \frac{1}{\sqrt{34}}(-5, 3), \quad \text{קצב מקסימלי} = 2\sqrt{34}.$$

כדי למצוא כיוון ללא שינוי מסדר ראשון צריך וקטור יחידה $\hat{n} = (a, b)$ כך ש-

$$(-10, 6) \cdot (a, b) = 0.$$

כלומר

$$-10a + 6b = 0.$$

אפשר לקחת $(a, b) = (3, 5)$, כי

$$-10 \cdot 3 + 6 \cdot 5 = -30 + 30 = 0.$$

ננרמל:

$$\|(3, 5)\| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34},$$

ולכן

$$\hat{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{34}}(3, 5)$$

הוא כיוון יחידה שבו $D_{\hat{n}_0}T(P) = 0$
 כעת הכיוון מן P אל Q הוא

$$Q - P = (5 - 1, 1 - (-2)) = (4, 3).$$

נורמטו

$$\|(4, 3)\| = 5,$$

ולכן וקטור היחידה הוא

$$\hat{n} = \frac{1}{5}(4, 3).$$

הנגזרת הכיוונית היא

$$D_{\hat{n}}T(P) = \nabla T(P) \cdot \hat{n} = (-10, 6) \cdot \frac{1}{5}(4, 3) = \frac{-40 + 18}{5} = -\frac{22}{5}.$$

$$D_{\hat{n}}T(1, -2) = -\frac{22}{5}.$$

הסימן השלילי אומר שבתנועה מן P לכיוון Q הטמפרטורה יורדת בקצב $\frac{22}{5}$ מעלות ליחידת אורך.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.15.

תהי f דיפרנציאבילית. נתון כי מישור המשיק לגרף $z = f(x, y)$ מעל $(2, -1)$ הוא

$$z = 7 - 4(x - 2) + 6(y + 1).$$

1. קבעו את $f(2, -1)$, $\nabla f(2, -1)$.

2. מצאו שני כיווני יחידה שבהם f אינה משתנה מסדר ראשון.

3. מצאו את כל כיווני היחידה שבהם הנגזרת הכיוונית שווה 5.

4. קרבו את $f(1.97, -0.96)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

המישור המשיק מכיל את כל המידע מסדר ראשון. השאלה השלישית דורשת לפתור אילוץ זוויתי: $\nabla f \cdot u = 5$ עם $\|u\| = 1$.

משוואת מישור משיק כללית היא

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

כאן $(a, b) = (2, -1)$. בהשוואה לנתון

$$z = 7 - 4(x - 2) + 6(y + 1),$$

נקבל

$$f(2, -1) = 7, \quad f_x(2, -1) = -4, \quad f_y(2, -1) = 6.$$

לכן

$$\nabla f(2, -1) = (-4, 6).$$

כיווני אי-שינוי מסדר ראשון הם וקטורי יחידה $\hat{n} = (n_1, n_2)$ המקיימים

$$(-4, 6) \cdot (n_1, n_2) = 0.$$

כלומר

$$-4n_1 + 6n_2 = 0.$$

וקטור ניצב לגרדיאנט הוא $(3, 2)$, כי

$$(-4, 6) \cdot (3, 2) = -12 + 12 = 0.$$

נורמתו $\sqrt{13}$, ולכן שני הכיוונים הם

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2).$$

נמצא את כל כיווני היחידה שבהם $D_{\hat{n}}f = 5$. נכתוב

$$\nabla f = (-4, 6), \quad \|\nabla f\| = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

נסמן

$$e = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{2\sqrt{13}}(-4, 6) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3).$$

וקטור יחידה ניצב לו הוא

$$e_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2).$$

כל וקטור יחידה נכתב כ

$$u = \cos \theta e + \sin \theta e_{\perp}.$$

אז

$$D_{\hat{n}} f = \nabla f \cdot \hat{n} = \|\nabla f\| \cos \theta = 2\sqrt{13} \cos \theta.$$

נדרוש

$$2\sqrt{13} \cos \theta = 5, \quad \cos \theta = \frac{5}{2\sqrt{13}}.$$

ולכן

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{25}{52}} = \pm \sqrt{\frac{27}{52}} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.$$

מכאן שני הכיוונים הם

$$u_{\pm} = \frac{5}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3) \pm \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2).$$

כלומר

$$u_{\pm} = \frac{1}{26}((-10, 15) \pm (9\sqrt{3}, 6\sqrt{3})).$$

לקירוב $f(1.97, -0.96)$:

$$\Delta x = 1.97 - 2 = -0.03, \quad \Delta y = -0.96 - (-1) = 0.04.$$

לכן

$$f(1.97, -0.96) \approx 7 - 4(-0.03) + 6(0.04) = 7 + 0.12 + 0.24 = 7.36.$$

$$f(1.97, -0.96) \approx 7.36.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.16.

נתון קו המפלס

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

1. מצאו את משוואת המשיק לקו המפלס בנקודה $(2, 1)$.2. מצאו כיוון יחידה שבו F עולה הכי מהר בנקודה זו.

3. הסבירו מדוע אין צורך לפתור את המשוואה עבור y כפונקציה של x .

פתרון.

עיקרון מנחה

לקו מפלס $F = c$, הגרדיאנט ∇F הוא נורמל לקו. לכן המשיק מתקבל ממשוואת ישר שהנורמל שלו הוא $\nabla F(2, 1)$.

ראשית נבדוק שהנקודה אכן על קו המפלס:

$$F(2, 1) = 2^3 + 1^3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 + 1 - 6 = 3.$$

הנקודה $(2, 1)$ אינה על קו המפלס $F = 0$. לכן כפי שהשאלה מנוסחת, אין משיק לקו $F = 0$ בנקודה $(2, 1)$, כי הנקודה אינה שייכת לקו.

כדי להפוך את הנתון למשמעותי, המשיק הרלוונטי הוא לקו המפלס העובר דרך $(2, 1)$, כלומר

$$F(x, y) = 3.$$

נחשב את הגרדיאנט:

$$F_x = 3x^2 - 3y, \quad F_y = 3y^2 - 3x.$$

בנקודה:

$$F_x(2, 1) = 3 \cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9,$$

$$F_y(2, 1) = 3 \cdot 1 - 6 = 3 - 6 = -3.$$

לכן

$$\nabla F(2, 1) = (9, -3) = 3(3, -1).$$

משוואת המשיק לקו המפלס $F = 3$ היא

$$\nabla F(2, 1) \cdot ((x, y) - (2, 1)) = 0.$$

כלומר

$$(9, -3) \cdot (x - 2, y - 1) = 0,$$

$$9(x - 2) - 3(y - 1) = 0.$$

נחלק ב-3:

$$3(x - 2) - (y - 1) = 0,$$

ולכן

$$\boxed{y - 1 = 3(x - 2)}.$$

כיוון העלייה המהירה ביותר של F הוא כיוון הגרדיאנט המנורמל:

$$\|\nabla F(2, 1)\| = \sqrt{9^2 + (-3)^2} = \sqrt{81 + 9} = 3\sqrt{10}.$$

לכן

$$\hat{n}_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{10}}(9, -3) = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1).$$

אין צורך לפתור עבור y , משום שמשוואת קו מפלס כבר מכילה את הגיאומטריה. הגרדיאנט מספק ישירות נורמל לקו, והמשיק הוא הישר הניצב לו.

$$F = 0. \text{ ולא לקו } F = 3 \text{ תיקון ניסוח: המשיק הוא לקו}$$

□

ניצחון

1.2.6 כלל השרשרת ושינוי משתנים

תרגיל 1.2.17

תרגיל בסיסי:

יהי $f(x, y, z) = 3x^2 - y + 8z^3$ חשבו $\frac{\partial f}{\partial t}$ כאשר $x(t) = 2t, y(t) = t^2, z(t) = t$

פתרון.

1. אם נציב את התלויות במפורש נקבל:

$$u(t) = f(x, y, z) \circ (x(t), y(t), z(t)) = 12t^2 - t^2 + 8t^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{du}{dt} = 22t + 24t^2$$

2. אם נשתמש בכלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$6x \Big|_{x=x(t)} \cdot 2 + -1 \cdot \Big|_{y=y(t)} \cdot 2t + 24z^2 \Big|_{z=z(t)} \cdot 1 = 24t - 2t + 24t^2 = 22t - 24t^2$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.18.

תהא $f(x, y)$ גזירה, נגדיר:

$$g(u, v) = f(3u - v, u^2 + v)$$

ונתונה הטבלה:

(x, y)	$f(x, y)$	$g(x, y)$	$f'_x(x, y)$	$f'_y(x, y)$
$(2, -1)$	6	-7	1	9
$(7, 3)$	4	2	-3	5

בהנתן:

$$f'_x(7, 3) = 1, f'_y(7, 3) = 2$$

חשבו את:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)}, \left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{(u,v)=(2,-1)}$$

פתרון.

נשים לב כי אם נסמן $x(u, v) = 3u - v, y(u, v) = u^2 + v$ אז x, y גזירות, ולכן ניתן להשתמש בכלל השרשרת:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)}$$

נחשב:

$$x(2, -1) = 3(2) - (-1) = 7, y(2, -1) = 2^2 - 1 = 3$$

$$\left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)} = 3, \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)} = 2u = 4$$

אז:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(u,v)=(2,-1)} = f'_x(7, 3) \cdot 3 + f'_y(7, 3) \cdot 4 = 3 + 4 \cdot 2 = 11$$

אותו דבר נעשה עבור $\left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{(u,v)=(2,-1)}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{(u,v)=(2,-1)} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_{(u,v)=(2,-1)} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{(u,v)=(2,-1)} \\ &= f'_x(7, 3) \cdot (-1) + f'_y(7, 3) \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.19

נתונה הפונקציה $f(x, y)$ המקיימת את המשוואה

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

ידוע בנוסף כי כל הנגזרות החלקיות השניות רציפות. נגדיר פונקציה חדשה $F(u, v) = f(u+v, u-v)$ הראו כי מתקיים

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = 0.$$

פתרון.

נגדיר את המשתנים:

$$x = u + v, \quad y = u - v.$$

נחשב את הנגזרות החלקיות של F :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

נחשב את הנגזרת השנייה:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

נחשב כל נגזרת חלקית בנפרד:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}.$$

בפירוט:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}.$$

מהנתון:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

ומהעובדה כי כל הנגזרות החלקיות השניות רציפות נובע שאין משמעות לסדר הגזירה:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.20.

נתונות פונקציות חלקות כלשהם במשתנה אחד שהינם $f(r), g(r)$ שהן שייכות למחלקה $C^\infty(\mathbb{R})$ נגדיר את פונקציית הגל הכללית:

$$\Psi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

הוכח כי מתקיים:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}$$

הערה: זה מד"ח המתארת תנועה כללית של גלים במימדים 1+1

פתרון.

נשתמש בכלל השרשרת והפונקציות f, g גזירות פעמיים והארגומנטים שלהן גזירים, ולכן תנאים מספיקים לשימוש בכלל השרשרת. נחשב:

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = f'(x - vt) \cdot \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} + g'(x + vt) \cdot \frac{\partial(x + vt)}{\partial x} = f' + g'$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = f''(x - vt) + g''(x + vt)$$

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = f'(x - vt) \cdot (-v) + g'(x + vt) \cdot v = -vf' + vg'$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = -v^2 f''(x - vt) + v^2 g''(x + vt) = v^2 f'' + v^2 g''$$

ולכן:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = f'' + g'' = \frac{1}{v^2} \cdot v^2 (f'' + g'') = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.21

בגלקסיית הזברות הג'ינג'יות ובשמה 58 – J המאכל המסורתי הינו סביח. חוקרים מכדור הארץ רצו לגלות איך מכינים את הסביח המושלם בגלקסיה זו. החוקרים מדדו את גודל העבודה ביחידות של עבודה וקיבלו: $W = K \cdot T \cdot z$ כאשר:

1. K זהו קבוע החצילים בגלקסיית הזברות הג'ינג'יות.

2. $T(x, y, z) = 58 - e^{-|r|^2}$ זוהי פונקציית הטחינה שתלויה במסלול הכנתה כאשר $\vec{r} = (x, y, z)$.

כאשר t משמעותו היא הזמן, בבקשה חשבו את ההספק לאורך מסלול הכנת הטחינה הבאה:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

בזמן $t = 0$.

מסלול זה נקרא מסלול בורגי.

פתרון.

□

ניצחון

נחשב את הנגזרת $\frac{dW}{dt}$ כאשר $W(t) = K \cdot T(\vec{r}(t)) \cdot z(t)$. נשתמש בכלל השרשרת (תנאים מתקיימים), ונזכור ש- KTz הוא מכפלה $u = K \cdot T \cdot z$, ולכן נגזור כמו כלל המכפלה:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

בנוסף נבחין כי:

$$T(x, y, z) = 58 - e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

לכן:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial(KTz)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial(KTz)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial(KTz)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

מתוך $KTz = K \cdot T(x, y, z) \cdot z$, נגזור ונקבל:

$$\begin{aligned} &= 2Kxe^{-(x^2+y^2+z^2)} \cdot (-\sin t) + 2Kye^{-(x^2+y^2+z^2)} \cdot (\cos t) \\ &\quad + K \left[(58 - e^{-(x^2+y^2+z^2)}) + 2z^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)} \right] \cdot 1 \end{aligned}$$

שימו לב!! זוהי פונקציה של t בלבד ולכן לא סיימנו!

נציב לנגזרת את מיקומו של החלקיק בזמן $t = 0$, נתון ע"י $\vec{r}(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 0)$. נחשב:

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{t=0} = 0 + 0 + K(58 - e^{-1}) = K(58 - e^{-1})$$

תרגיל 1.2.22

פונקציה $f(x, y)$ תקרא הומוגנית מסדר p אם היא מקיימת לכל $\lambda > 0$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x, y)$. נתון כי f דיפרנציאבילית בכל המישור. הוכח:

$$f \text{ הומוגנית מסדר } p \text{ (אם ורק אם)} \iff (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (x, y) = pf(x, y)$$

פתרון.

נניח כלל השרשרת, תנאים מתקיימים.

נגזור את שני אגפי השוויון $f(tx, ty) = t^p f(x, y)$ לפי t :

$$f_x(tx, ty) \cdot x + f_y(tx, ty) \cdot y = pt^{p-1} f(x, y)$$

נציב $t = 1$, ונקבל:

$$(f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (x, y) = pf(x, y)$$

כדי להוכיח את הכיוון ההפוך, נגדיר:

$$g(t) = t^{-p} f(tx, ty)$$

נגזור (עם כלל השרשרת):

$$\frac{dg}{dt} = -pt^{-p-1} f(tx, ty) + t^{-p} (f_x(tx, ty), f_y(tx, ty)) \cdot (x, y)$$

נשתמש בהנחת הקשר:

$$(f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (x, y) = pf(x, y)$$

ונקבל:

$$\frac{dg}{dt} = -pt^{-p-1} f(tx, ty) + t^{-p} \cdot \frac{pf(tx, ty)}{t} = 0$$

ולכן $g(t)$ פונקציה קבועה, כלומר:

$$t^{-p} f(tx, ty) = g(1) = f(x, y) \Rightarrow f(tx, ty) = t^p f(x, y)$$

וזו בדיוק הגדרת ההומוגניות.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.23

תהי $z = f(u, v)$ פונקציה דיפרנציאבילית, כאשר

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

1. חשבו את z_x, z_y באמצעות f_u, f_v .

2. הוכיחו את הזהות

$$z_x^2 + z_y^2 = e^{2x}(f_u^2 + f_v^2).$$

3. פרשו גיאומטריה את הזהות.

פתרון.**עיקרון מנחה**

המעבר $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$ היא מעבר מלוגריתם-רדיוס וזווית למישור. הנגזרות לפי x ולפי y מאונכות ובאותו אורך e^x , ולכן מתקבלת זהות נורמות.

נחשב את הנגזרות של u, v :

$$u_x = e^x \cos y = u, \quad u_y = -e^x \sin y = -v,$$

$$v_x = e^x \sin y = v, \quad v_y = e^x \cos y = u.$$

לפי כלל השרשרת,

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x = f_u u + f_v v,$$

$$z_y = f_u u_y + f_v v_y = f_u(-v) + f_v u = -v f_u + u f_v.$$

כעת נחשב את סכום הריבועים באופן מלא:

$$z_x^2 = (u f_u + v f_v)^2 = u^2 f_u^2 + 2uv f_u f_v + v^2 f_v^2,$$

$$z_y^2 = (-v f_u + u f_v)^2 = v^2 f_u^2 - 2uv f_u f_v + u^2 f_v^2.$$

נחבר:

$$z_x^2 + z_y^2 = (u^2 + v^2) f_u^2 + (u^2 + v^2) f_v^2.$$

כעת

$$u^2 + v^2 = e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} (\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x}.$$

לכן

$$z_x^2 + z_y^2 = e^{2x}(f_u^2 + f_v^2).$$

גיאומטריה, שתי נגזרות המעבר הן

$$(u_x, v_x) = (u, v), \quad (u_y, v_y) = (-v, u).$$

המכפלה הפנימית שלהן היא

$$(u, v) \cdot (-v, u) = -uv + uv = 0,$$

ולשתיהן נורמה

$$\sqrt{u^2 + v^2} = e^x.$$

כלומר המעבר מותחת מקומית אורכים בפקטור e^x ושומרת זוויות; זה מסביר מדוע גודל הגרדיאנט מוכפל ב- e^x .

□

ניצחון

תרגיל 1.2.24

נתונה פונקציה $z(t) = f(x(t), y(t))$ כאשר

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2), \quad x(t) = e^t \cos t, \quad y(t) = e^t \sin t.$$

חשבו את $z'(t)$ בשתי דרכים: ישירות לאחר הצבה, ובעזרת כלל השרשרת. ודאו שהתוצאות זהות.

פתרון.

עיקרון מנחה

המסלול נבחר כך ש- $x(t)^2 + y(t)^2 = e^{2t}$. בדרך הישירה התלות הזוויתית נעלמת; בדרך כלל השרשרת צריך לראות את אותה התבטלות דרך המכפלה הפנימית.

דרך ישירה: נחשב

$$x(t)^2 + y(t)^2 = e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t = e^{2t}.$$

לכן

$$z(t) = \ln(1 + e^{2t}).$$

נגזור:

$$z'(t) = \frac{1}{1 + e^{2t}} \cdot 2e^{2t} = \frac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}}.$$

כעת בדרך כלל השרשרת. תחילה

$$f_x = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad f_y = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$

נגזרות המסלול הן

$$x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t),$$

$$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t).$$

לפי כלל השרשרת,

$$z'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

נציב:

$$z'(t) = \frac{2xx' + 2yy'}{1 + x^2 + y^2}.$$

נחשב את המונה:

$$xx' = e^t \cos t \cdot e^t (\cos t - \sin t) = e^{2t} (\cos^2 t - \sin t \cos t),$$

$$yy' = e^t \sin t \cdot e^t (\sin t + \cos t) = e^{2t} (\sin^2 t + \sin t \cos t).$$

לכן

$$xx' + yy' = e^{2t} (\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{2t}.$$

בנוסף $1 + x^2 + y^2 = 1 + e^{2t}$. לכן

$$z'(t) = \frac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}}.$$

קיבלנו את אותה תוצאה:

$$z'(t) = \frac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}}.$$

□

ניצחון

1.2.7 יישומים גיאומטריים וניסויים

1.2.25 תרגיל

גובה פני שטח נתון על ידי

$$H(x, y) = 100 - (x - 2)^2 - 2(y + 1)^2 + xy.$$

- מצאו את נקודת הפסגה של ההר לפי תנאי מסדר ראשון.
- כדור נמצא בנקודה $P = (1, 0)$. מצאו את כיוון הירידה התלולה ביותר, כלומר את הכיוון שבו הכדור יתחיל להתגלגל במודל מסדר ראשון.
- חשבו את קצב הירידה של הגובה ליחידת אורך בכיוון זה.
- הסבירו מדוע בנקודת הפסגה עצמה אין כיוון ירידה מסדר ראשון.

פתרון.

עיקרון מנחה

הגרדיאנט של H מצביע לכיוון העלייה התלולה ביותר. כדור שמתגלגל בלי חיכוך ובמודל מקומי פשוט יתחיל לנוע בכיוון ההפוך לגרדיאנט, כלומר בכיוון $-\nabla H$. אם $\nabla H = 0$, הקירוב מסדר ראשון שטוח, ואז צריך מידע מסדר שני כדי להבין את ההתנהגות.

נחשב נגזרות חלקיות:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = H_x = -2(x - 2) + y = -2x + 4 + y,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = H_y = -4(y + 1) + x = x - 4y - 4.$$

נקודת פסגה חשודה מתקבלת מפתרון המערכת

$$H_x = 0, \quad H_y = 0.$$

כלומר

$$-2x + 4 + y = 0, \quad x - 4y - 4 = 0.$$

מן המשוואה הראשונה:

$$y = 2x - 4.$$

נציב בשנייה:

$$x - 4(2x - 4) - 4 = 0.$$

נפתח:

$$x - 8x + 16 - 4 = 0,$$

ולכן

$$-7x + 12 = 0, \quad x = \frac{12}{7}.$$

כעת

$$y = 2 \cdot \frac{12}{7} - 4 = \frac{24}{7} - \frac{28}{7} = -\frac{4}{7}.$$

לכן הנקודה הקריטית היא

$$\left(\frac{12}{7}, -\frac{4}{7} \right).$$

ההסיאן הוא

$$\nabla^2 H = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

המינור הראשון של $-\nabla^2 H$ הוא $2 > 0$, והדטרמיננטה שלו היא

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0.$$

לכן $-\nabla^2 H$ חיובית מובהקת, ומכאן $\nabla^2 H$ שלילית מובהקת. לכן הנקודה הקריטית היא פסגה מקומית, ובמקרה הזה גם פסגה גלובלית כי H ריבועית קעורה.

כעת נחשב את הגרדיאנט בנקודה $P = (1, 0)$:

$$H_x(1, 0) = -2 \cdot 1 + 4 + 0 = 2,$$

$$H_y(1, 0) = 1 - 4 \cdot 0 - 4 = -3.$$

לכן

$$\nabla H(1, 0) = (2, -3).$$

כיוון הירידה התלולה ביותר הוא הכיוון ההפוך:

$$-\nabla H(1, 0) = (-2, 3).$$

וקטור היחידה בכיוון זה הוא

$$\hat{n}_{\text{down}} = \frac{(-2, 3)}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{(-2, 3)}{\sqrt{13}}.$$

לכן

$$\hat{n}_{\text{down}} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3).$$

קצב שינוי הגובה בכיוון זה הוא

$$D_{\hat{n}_{\text{down}}} H(1, 0) = \nabla H(1, 0) \cdot \hat{n}_{\text{down}}.$$

נציב:

$$D_{\hat{n}_{\text{down}}} H(1, 0) = (2, -3) \cdot \frac{(-2, 3)}{\sqrt{13}}.$$

נחשב את המכפלה הפנימית:

$$(2)(-2) + (-3)(3) = -4 - 9 = -13.$$

לכן

$$D_{\hat{n}_{\text{down}}} H(1, 0) = -\frac{13}{\sqrt{13}} = -\sqrt{13}.$$

כלומר הגובה יורד בקצב $\sqrt{13}$ יחידות גובה לכל יחידת אורך:

$$D_{\hat{n}_{\text{down}}} H(1, 0) = -\sqrt{13}.$$

בנקודת הפסגה $(\frac{12}{7}, -\frac{4}{7})$ מתקיים $\nabla H = 0$. לכן לכל כיוון יחידה $\hat{n}$:

$$D_{\hat{n}} H = \nabla H \cdot \hat{n} = 0.$$

מסקנה: מסדר ראשון אין כיוון ירידה מועדף. כדי להבין שמדובר בפסגה, ולא במישור שטוח באמת, צריך לבדוק את האיברים מסדר שני, כלומר את ההסיאן.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.26.

במעבדה מודדים תגובת חיישן התלויה בשני פרמטרים a, b :

$$M(a, b) = \sqrt{a^2 + 2b^2} + e^{ab-a}.$$

הכיוול נעשה סביב $(a, b) = (1, 1)$.

1. מצאו את המישור המשיק לגרף $z = M(a, b)$ מעל $(1, 1)$.
2. השתמשו במישור המשיק כדי לקרב את $M(1.02, 0.97)$.
3. מצאו כיוון שינוי יחידה $(\Delta a, \Delta b)$ שבו קריאת החיישן אינה משתנה מסדר ראשון.
4. הסבירו את הרציונל המעשי של הסעיף הקודם.

פתרון.

עיקרון מנחה

מישור משיק הוא לא רק אובייקט גיאומטרי. הוא המודל הליניארי המקומי של ניסוי: אם משנים מעט את הפרמטרים, הוא אומר מה תהיה ההשפעה מסדר ראשון. כיוון ניצב לגרדיאנט הוא כיוון שבו השינוי מסדר ראשון מתאפס.

תחילה נחשב את ערך הפונקציה בנקודת הכיול:

$$M(1, 1) = \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1^2} + e^{1 \cdot 1 - 1} = \sqrt{3} + 1.$$

כעת נחשב נגזרות חלקיות. עבור האיבר הראשון:

$$\frac{\partial}{\partial a} \sqrt{a^2 + 2b^2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 2b^2}} \cdot 2a = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \sqrt{a^2 + 2b^2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 2b^2}} \cdot 4b = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}.$$

עבור האיבר השני:

$$\frac{\partial}{\partial a} e^{ab-a} = e^{ab-a} \cdot \frac{\partial}{\partial a} (ab - a) = e^{ab-a} (b - 1),$$

$$\frac{\partial}{\partial b} e^{ab-a} = e^{ab-a} \cdot \frac{\partial}{\partial b} (ab - a) = ae^{ab-a}.$$

לכן

$$M_a(a, b) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} + (b - 1)e^{ab-a},$$

$$M_b(a, b) = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} + ae^{ab-a}.$$

בנקודה $(1, 1)$:

$$M_a(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}} + (1 - 1)e^0 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$M_b(1, 1) = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \cdot e^0 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

לכן המישור המשיק הוא

$$z = \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(a - 1) + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)(b - 1).$$

כלומר

$$z = \sqrt{3} + 1 + \frac{a-1}{\sqrt{3}} + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)(b-1).$$

לקרוב $M(1.02, 0.97)$, נציב

$$\Delta a = 1.02 - 1 = 0.02, \quad \Delta b = 0.97 - 1 = -0.03.$$

לכן

$$M(1.02, 0.97) \approx \sqrt{3} + 1 + \frac{0.02}{\sqrt{3}} + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)(-0.03).$$

נפתח את האיברים:

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)(-0.03) = -0.03 - \frac{0.06}{\sqrt{3}}.$$

לכן

$$M(1.02, 0.97) \approx \sqrt{3} + 1 - 0.03 + \frac{0.02 - 0.06}{\sqrt{3}}.$$

כלומר

$$M(1.02, 0.97) \approx \sqrt{3} + 0.97 - \frac{0.04}{\sqrt{3}}.$$

כיוון שבו הקריאה אינה משתנה מסדר ראשון צריך להיות ניצב לגרדיאנט

$$\nabla M(1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

נסמן

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad B = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

וקטור ניצב ל- (A, B) הוא למשל

$$(B, -A).$$

נבדוק:

$$(A, B) \cdot (B, -A) = AB - AB = 0.$$

לכן כיוון יחידה מתאים הוא

$$\hat{n} = \frac{(B, -A)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

כלומר

$$\hat{n} = \frac{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}}.$$

הרציונל המעשי הוא שכאשר רוצים לשנות את תנאי הניסוי בלי לשנות את קריאת החיישן מסדר ראשון, יש לנוע לאורך קו מפלס מקומי. קו מפלס מקומי משיק לכיוון הניצב לגרדיאנט, ולכן הכיוון שמצאנו הוא כיוון כיול שבו השינוי הליניארי מתבטל.

□

ניצחון

1.2.8 תרגילי סיכום מעורבים

תרגיל 1.2.27

תהי

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y + xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. הוכיחו ש- f רציפה בראשית.
2. חשבו את כל הנגזרות הכיווניות בראשית.
3. בדקו האם f דיפרנציאבילית בראשית.
4. עבור $\gamma(t) = (t, t^2)$, חשבו $\frac{d}{dt}f(\gamma(t))|_{t=0}$ ישירות, והסבירו האם מותר היה להשתמש בכלל השרשרת בנקודה זו.

פתרון.

עיקרון מנחה

הפונקציה נראית סינגולרית, אבל המונה מסדר גבוה מספיק. לאחר פישוט מתברר שהיא בעצם פולינום. למרות זאת נבדוק את הדיפרנציאביליות לפי ההגדרה כדי לחזק את הטכניקה.

עבור $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{x^3 y + xy^3}{x^2 + y^2} = \frac{xy(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = xy.$$

גם בראשית

$$f(0, 0) = 0 = 0 \cdot 0.$$

לכן למעשה

$$f(x, y) = xy$$

בכל המישור. מכאן מיד f רציפה ודיפרנציאבילית בכל מקום, אך נחשב זאת ישירות. רציפות בראשית:

$$|f(x, y)| = |xy|.$$

לפי אי השוויון

$$2|xy| \leq x^2 + y^2,$$

נקבל

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \rightarrow 0.$$

לכן f רציפה בראשית.נגזרת כיוונית בכיוון יחידה $\hat{n} = (n_1, n_2)$:

$$f(tn_1, tn_2) = t^2 n_1 n_2.$$

לכן

$$D_{\hat{n}} f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tn_1, tn_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 n_1 n_2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t n_1 n_2 = 0.$$

כל הנגזרות הכיווניות קיימות ושוות 0.

כעת נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה. על הצירים:

$$f(h, 0) = 0, \quad f(0, k) = 0,$$

ולכן

$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0.$$

לפי ההגדרה צריך לבדוק האם

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

במקרה שלנו זהו הגבול

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

נחסום:

$$\left| \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \frac{|hk|}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

מן האי-שוויון

$$2|hk| \leq h^2 + k^2$$

נקבל

$$\frac{|hk|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{h^2 + k^2}{2\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0.$$

לכן

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

ולכן f דיפרנציאבילית בראשית.כעת $\gamma(t) = (t, t^2)$. ישירות:

$$f(\gamma(t)) = f(t, t^2) = t \cdot t^2 = t^3.$$

לכן

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} t^3 \right|_{t=0} = 3t^2|_{t=0} = 0.$$

מאחר שהוכחנו ש- f דיפרנציאבילית בראשית, מותר גם להשתמש בכלל השרשרת:

$$\nabla f(0,0) = (0,0), \quad \gamma'(t) = (1, 2t), \quad \gamma'(0) = (1,0).$$

ולכן

$$\nabla f(0,0) \cdot \gamma'(0) = (0,0) \cdot (1,0) = 0.$$

. וכלל השרשרת מותר, 0 דיפרנציאבילית בראשית, כל הנגזרות הכיווניות שם שוות f

□

ניצחון

תרגיל 1.2.28

עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y + \alpha y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכי α הפונקציה רציפה בראשית, עבור אילו ערכי α קיימות כל הנגזרות הכיווניות בראשית, ועבור אילו ערכי α היא דיפרנציאבילית בראשית.

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו תרגיל פרמטרי שנראה כאילו אולי אפשר לבחור α כדי לתקן את הבעיה. בקואורדינטות קוטביות נראה שהרציפות מתקיימת לכל α , שגם כל הנגזרות הכיווניות קיימות לכל α , אבל דיפרנציאביליות היא תנאי חזק יותר ותדרוש בדיוק $\alpha = 1$.

נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

עבור $r > 0$:

$$f_\alpha(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \cos^2 \theta \cdot r \sin \theta + \alpha r^3 \sin^3 \theta}{r^2} = r (\cos^2 \theta \sin \theta + \alpha \sin^3 \theta).$$

נוציא $\sin \theta$:

$$f_\alpha = r \sin \theta (\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta).$$

הגורם הזוויתי חסום לכל α קבוע. כלומר קיים קבוע $C_\alpha > 0$ כך ש

$$|\sin \theta (\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta)| \leq C_\alpha.$$

לכן

$$|f_\alpha(x,y)| \leq C_\alpha r \rightarrow 0.$$

מכאן

$$\boxed{f_\alpha \text{ רציפה בראשית לכל } \alpha \in \mathbb{R}.}$$

כעת נחשב נגזרת כיוונית. יהי $\hat{n} = (n_1, n_2)$ וקטור יחידה. עבור $t \neq 0$:

$$f_\alpha(tn_1, tn_2) = \frac{t^2 n_1^2 \cdot tn_2 + \alpha t^3 n_2^3}{t^2(n_1^2 + n_2^2)}.$$

מאחר ש

$$n_1^2 + n_2^2 = 1,$$

נקבל

$$f_\alpha(tn_1, tn_2) = t(n_1^2 n_2 + \alpha n_2^3).$$

לכן

$$D_{\hat{n}} f_\alpha(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(tn_1, tn_2) - f_\alpha(0, 0)}{t} = n_1^2 n_2 + \alpha n_2^3.$$

כל הנגזרות הכיווניות קיימות לכל α , ולכן

$$\boxed{D_{\hat{n}} f_\alpha(0, 0) = n_1^2 n_2 + \alpha n_2^3.}$$

נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה עם השבר. ראשית נגזרות חלקיות:

$$f_\alpha(h, 0) = 0,$$

ולכן

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(h, 0) - f_\alpha(0, 0)}{h} = 0.$$

על ציר y :

$$f_\alpha(0, k) = \frac{\alpha k^3}{k^2} = \alpha k.$$

לכן

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(0, k) - f_\alpha(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\alpha k}{k} = \alpha.$$

לפי הגדרת הדיפרנציאביליות בראשית צריך לבדוק האם

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f_\alpha(x, y) - f_\alpha(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

מאחר ש

$$f_\alpha(0, 0) = 0, \quad f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = \alpha,$$

צריך לבדוק האם

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f_\alpha(x, y) - \alpha y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

בקואורדינטות קוטביות,

$$y = r \sin \theta.$$

לכן

$$\begin{aligned} f_\alpha(x, y) - \alpha y &= r \sin \theta (\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta) - \alpha r \sin \theta \\ &= r \sin \theta (\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta - \alpha). \end{aligned}$$

מאחר ש

$$\alpha \sin^2 \theta - \alpha = -\alpha \cos^2 \theta,$$

נקבל

$$f_\alpha(x, y) - \alpha y = r \sin \theta \cos^2 \theta (1 - \alpha).$$

כיוון ש- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, מתקבל

$$\frac{f_\alpha(x, y) - \alpha y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = (1 - \alpha) \sin \theta \cos^2 \theta.$$

כדי שהגבול יהיה 0 לכל התקרבות אל הראשית, הביטוי הזוויתי צריך להתאפס לכל θ . מאחר ש- $\sin \theta \cos^2 \theta$ אינו מתאפס לכל θ , חייבים

$$1 - \alpha = 0.$$

לכן

$$\alpha = 1.$$

אם $\alpha = 1$, אכן

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 y + y^3}{x^2 + y^2} = y$$

עבור $(x, y) \neq (0, 0)$, וגם בראשית $f_1(0, 0) = 0$. לכן $f_1(x, y) = y$ בכל המישור, ומכאן שהיא דיפרנציאבילית.

אם $\alpha \neq 1$, ניקח למשל $\theta = \frac{\pi}{4}$. אז

$$\sin \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0,$$

ולכן

$$\frac{f_\alpha(x, y) - \alpha y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

אינו שואף ל-0. לכן f_α אינה דיפרנציאבילית בראשית.

α .רציפות בראשית: כל

α .כל הנגזרות הכיווניות בראשית: כל

$\alpha = 1$.דיפרנציאביליות בראשית: רק

□

ניצחון