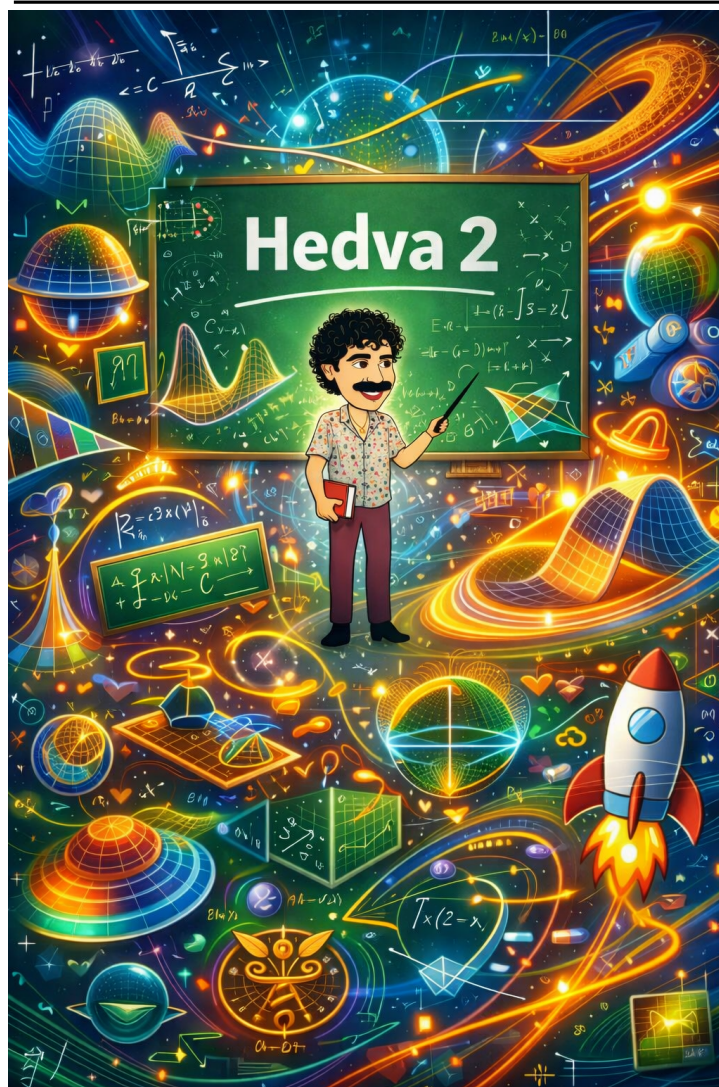


חדו"א 2 להנדסות

סיכומים ותרגולים



נערך ונכתב על ידי חן גדי ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המצויב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

נוצר על ידי חוג גדי

תוכן העניינים

2	1 תרגול 7 – כלל השרשרת, אינטגרל פרמטרי, פונקציה סתומה ומישור משיק	
2	1.1 עוד נגזרת כיוונית	
3	1.2 כלל השרשרת	
13	1.3 אינטגרל פרמטרי וכלל לייבניץ	
19	1.4 משפט הפונקציה הסתומה	
23	1.5 מישור משיק, משטחי רמה וגרדיאנט	
30	1.6 כלל השרשרת ושינוי משתנים-עוד תרגילים	

תרגול 7 – כלל השרשרת, אינטגרל פרמטרי, פונקציה סתומה ומישור משיק

1.1 עוד נגזרת כיוונית

1.1.1 תרגיל

תהי:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3x + 4y, & x \neq 0 \\ 4y, & x = 0 \end{cases}$$

- א. עבור אילו ערכים של m אי־השוויון $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0, 0) < m$ מתקיים לכל וקטור יחידה $\vec{n}$?
 ב. מצא וקטור יחידה $\vec{n}$ כך ש־ $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0, 0) = 0$.

פתרון.

נחשב את הנגזרת החלקית ב־ $(0, 0)$ לפי ההגדרה:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) + 3h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) + 3 = -3$$

נבדוק את $f'_y(0, 0)$ לפי ההגדרה האם הפונקציה דיפרנציאבילית ב־ $(0, 0)$:

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - 0}{h} = 4$$

כעת נחשב האם הפונקציה דיפרנציאבילית לפי:

$$\Delta x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right) + 3\Delta x + 4\Delta y = 3\Delta x + 4\Delta y + \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

כאשר:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{\Delta x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq \left| \frac{|\Delta x|^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leq |\Delta x| \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$$

לכן הפונקציה דיפרנציאבילית, ונוכל להשתמש בנוסחת הנגזרת הכיוונית:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n}$$

גרדיאנט הפונקציה בנקודה $(0, 0)$:

$$\nabla f = 3\hat{i} + 4\hat{j} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

הערך המקסימלי של נגזרת כיוונית הוא 5, והוא מתקבל כאשר $\vec{n}$ בכיוון הגרדיאנט. לכן: אם $m > 5$, אז $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0, 0) < m$ לכל $\vec{n}$ יחידה.
ב. כדי לקבל נגזרת כיוונית אפס, נבחר $\vec{n}$ מאונך לגרדיאנט:

$$\nabla f = 3\hat{i} + 4\hat{j} \Rightarrow \vec{n} = \frac{-4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0, 0) = \nabla f \cdot \vec{n} = 0$$

□

ניצחון

1.2 כלל השרשרת

תזכורת (מההרצאה)

כלל השרשרת עבור מסלול חד-פרמטרי. תהי $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית, כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה. נניח כי $x(t), y(t)$ גזירות ב- t_0 , וכי

$$(x(t_0), y(t_0)) \in U.$$

אם נגדיר

$$z(t) = f(x(t), y(t)),$$

אז z גזירה ב- t_0 , ומתקיים

$$z'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0).$$

כדי להשתמש בטענה מזהים את השדה החיצוני f , את המסלול $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, ואז מחשבים בנפרד את ∇f ואת $\gamma'(t)$. לבסוף מציבים בנוסחה $z'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

תזכורת (מההרצאה)

כלל השרשרת עבור שלושה משתנים ושני פרמטרים. תהי $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית, כאשר $V \subseteq \mathbb{R}^3$ פתוחה. נגדיר

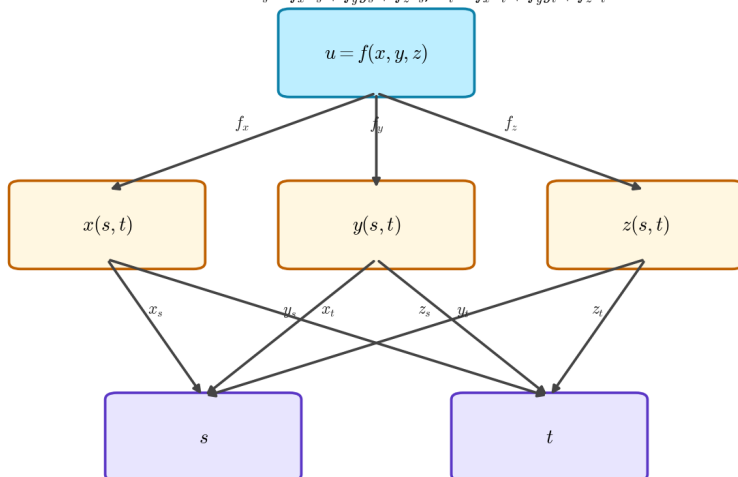
$$u(s, t) = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t)).$$

אם x, y, z בעלות נגזרות חלקיות, אז

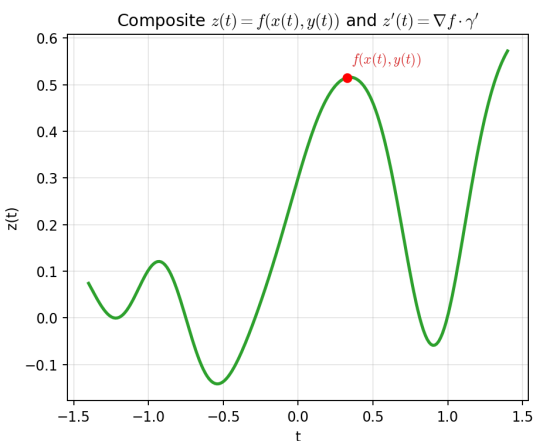
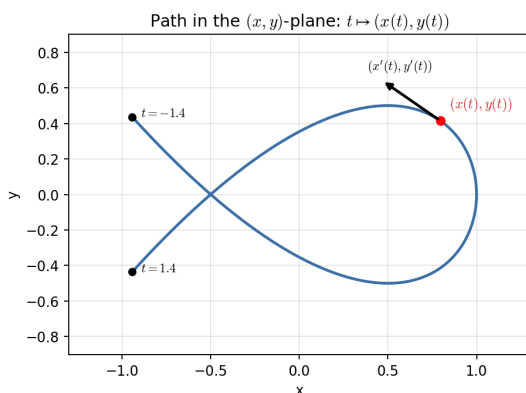
$$u_s = f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s, \quad u_t = f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t.$$

כדי לחשב u_s אוספים את כל המסלולים s -מ- u : דרך x , דרך y , ודרך z . כדי לחשב u_t עושים אותו דבר עבור t . הנגזרות של f תמיד מחושבות בנקודה הפנימית $(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$.

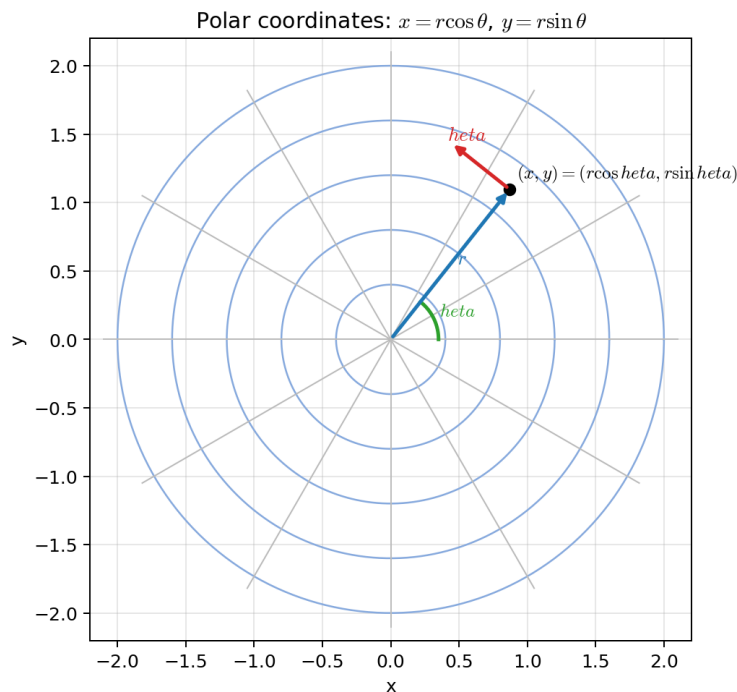
$$\text{Chain rule: } u_s = f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s, \quad u_t = f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t$$



עץ תלות עבור פונקציה מורכבת. כל מסלול מהמשתנה החיצוני אל הפונקציה הסופית תורם מכפלת נגזרות. סכום כל המסלולים הוא כלל השרשרת.



דוגמה גיאומטרית לכלל השרשרת: משמאל מסלול במישור, ומימין הגודל המתקבל כאשר מציבים את המסלול בתוך שדה סקלרי.



במעבר לקואורדינטות פולאריות המשתנים x, y נכתבים בעזרת r, θ . לכן כל נגזרת לפי r או θ מחייבת שימוש בכלל השרשרת.

תרגיל 1.2.1.

חלקיק נע במישור במסלול

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t \cos t, t \sin t),$$

והפוטנציאל החשמלי במישור נתון על ידי

$$V(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2).$$

חשבו את $\frac{d}{dt} V(\gamma(t))$.

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו בדיוק מקרה של שדה סקלרי שמורכב עם מסלול. ראשית נגזור את הפוטנציאל לפי x, y , לאחר מכן נגזור את המסלול לפי t , ולבסוף נפעיל את כלל השרשרת.

נגדיר

$$z(t) = V(x(t), y(t)).$$

כדי להפעיל את כלל השרשרת נחשב תחילה את הנגזרות החלקיות של V :

$$V_x(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad V_y(x, y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$

כעת נגזור את רכיבי המסלול:

$$x'(t) = \cos t - t \sin t, \quad y'(t) = \sin t + t \cos t.$$

לפי כלל השרשרת,

$$z'(t) = V_x(x(t), y(t))x'(t) + V_y(x(t), y(t))y'(t).$$

נציב את $x(t) = t \cos t$ ואת $y(t) = t \sin t$. ראשית נחשב את המכנה:

$$1 + x(t)^2 + y(t)^2 = 1 + t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t = 1 + t^2.$$

לכן

$$V_x(x(t), y(t)) = \frac{2t \cos t}{1 + t^2}, \quad V_y(x(t), y(t)) = \frac{2t \sin t}{1 + t^2}.$$

מכאן

$$z'(t) = \frac{2t \cos t}{1 + t^2} (\cos t - t \sin t) + \frac{2t \sin t}{1 + t^2} (\sin t + t \cos t).$$

נפתח סוגריים:

$$z'(t) = \frac{2t}{1 + t^2} (\cos^2 t - t \sin t \cos t + \sin^2 t + t \sin t \cos t).$$

האיברים המעורבים מצטמצמים, ומתקבל

$$z'(t) = \frac{2t}{1 + t^2} (\cos^2 t + \sin^2 t) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

לכן

$$\boxed{\frac{d}{dt} V(\gamma(t)) = \frac{2t}{1 + t^2}}.$$

פירוש פיזיקלי: הגודל $V(\gamma(t))$ הוא הפוטנציאל שהחלקיק "מרגיש" בזמן t . הנגזרת שחישבנו היא קצב השינוי של הפוטנציאל לאורך התנועה. במקרה זה הקצב תלוי רק במרחק מן הראשית, ואינו תלוי בזווית, משום שהפוטנציאל רדיאלי.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.2.

נגדיר

$$u(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

כאשר f דיפרנציאבילית. חשבו את u_r ואת u_θ . לאחר מכן הפעילו את התוצאה על

$$f(x, y) = x^2 + xy.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו מקרה חשוב מאוד בפיזיקה: עוברים מקואורדינטות קרטזיות לקואורדינטות פולאריות. הפונקציה החיצונית היא $f(x, y)$, והמשתנים הפנימיים הם $x(r, \theta) = r \cos \theta$ ו- $y(r, \theta) = r \sin \theta$.

נחשב תחילה את הנגזרות של המשתנים הפנימיים:

$$x_r = \cos \theta, \quad y_r = \sin \theta, \quad x_\theta = -r \sin \theta, \quad y_\theta = r \cos \theta.$$

כעת נפעיל את כלל השרשרת. עבור הנגזרת לפי r נקבל

$$u_r = f_x x_r + f_y y_r = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta.$$

עבור הנגזרת לפי θ נקבל

$$u_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta = -r f_x \sin \theta + r f_y \cos \theta.$$

לכן הנוסחאות הכלליות הן

$$u_r = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta,$$

$$u_\theta = -r f_x \sin \theta + r f_y \cos \theta.$$

כעת ניישם על $f(x, y) = x^2 + xy$. ראשית

$$f_x = 2x + y, \quad f_y = x.$$

נציב $y = r \sin \theta, x = r \cos \theta$:

$$f_x = r(2 \cos \theta + \sin \theta), \quad f_y = r \cos \theta.$$

לכן

$$u_r = r(2 \cos \theta + \sin \theta) \cos \theta + r \cos \theta \sin \theta.$$

נסדר:

$$u_r = 2r \cos^2 \theta + 2r \sin \theta \cos \theta.$$

וכן

$$u_\theta = -r \cdot r(2 \cos \theta + \sin \theta) \sin \theta + r \cdot r \cos^2 \theta.$$

כלומר

$$u_\theta = -2r^2 \sin \theta \cos \theta - r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta.$$

אפשר להשאיר כך, ואפשר גם לכתוב

$$u_r = 2r \cos^2 \theta + 2r \sin \theta \cos \theta,$$

$$u_\theta = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2r^2 \sin \theta \cos \theta.$$

אלו הן הנגזרות של אותה פונקציה כאשר היא נכתבת במשתנים המתאימים יותר לסימטריה של הבעיה.

□

ניצחון

עיקרון מנחה

החלפת משתנה לאורך תהליך היא כלל השרשרת הרב משתני. נניח שיש גודל מצב

$$A = A(x, y),$$

אבל התהליך עצמו אינו נתון על ידי בידוד של y כפונקציה של x , אלא על ידי פרמטר t :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

אז הפונקציה הנמדדת לאורך התהליך היא

$$\tilde{A}(t) = A(x(t), y(t)).$$

לפי כלל השרשרת של חדו"א 2,

$$\frac{d}{dt} A(x(t), y(t)) = A_x(x(t), y(t))x'(t) + A_y(x(t), y(t))y'(t).$$

באופן שקול, הכתיב הדיפרנציאלי

$$dA = A_x dx + A_y dy$$

לא אומר שמחליפים משתנה באינטגרל חד-ממדי בלבד, אלא שמושכים את הדיפרנציאל אל המסלול:

$$dx = x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt.$$

הערה קטנה ומועילה

כאשר בתרגיל נתון תהליך פיזיקלי בעזרת פרמטר, לא מנסים בכוח לבדוד משתנה אחד כפונקציה של השני. מתייחסים לתהליך כאל עקומה במישור המשתנים, מפעילים את כלל השרשרת הרב משתני, ואז מחשבים אינטגרל חד-ממדי לאורך הפרמטר. זהו בדיוק אותו רעיון כמו $u(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$, רק שהפעם משתמשים בו בתוך אינטגרל פיזיקלי.

דוגמה 1.2.3

בתרמודינמיקה יש גדלים שתלויים בשני משתני מצב. למשל עבור גז אידיאלי אפשר לכתוב את האנטרופיה, עד כדי קבוע, בצורה

$$S(T, V) = C_V \ln T + R \ln V.$$

אם התהליך נתון על ידי פונקציה $V = V(T)$, אז אין כאן רק החלפה $dV = V'(T)dT$. יש כאן הרכבה של פונקציה בשני משתנים עם עקומה:

$$T \mapsto (T, V(T)) \mapsto S(T, V(T)).$$

לכן

$$\frac{d}{dT} S(T, V(T)) = S_T(T, V(T)) + S_V(T, V(T))V'(T).$$

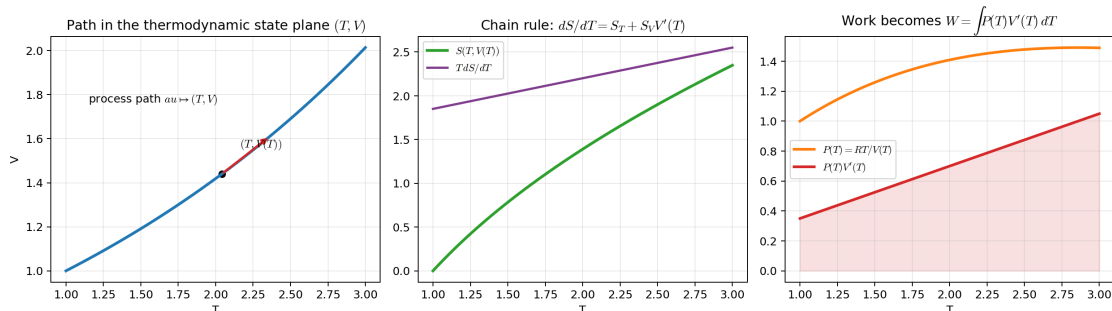
מכיוון שבתהליך הפיך מתקיים

$$\delta Q_{\text{rev}} = T dS,$$

נקבל

$$Q_{\text{rev}} = \int_{T_0}^{T_1} T (S_T(T, V(T)) + S_V(T, V(T))V'(T)) dT.$$

זו כבר איננה דוגמה של חדו"א 1: זו הפעלה ישירה של כלל השרשרת הרב משתני על פונקציה $S(T, V)$ לאורך עקומה במישור (T, V) .



התהליך התרמודינמי הוא עקומה במישור (T, V) . האנטרופיה היא פונקציה של שני משתנים, ולכן הנגזרת שלה לאורך התהליך מתקבלת מכלל השרשרת הרב משתני: $\frac{d}{dT} S(T, V(T)) = S_T + S_V V'(T)$.

תרגיל 1.2.4.

עבור מול אחד של גז אידיאלי נתונה האנטרופיה, עד כדי קבוע, על ידי

$$S(T, V) = C_V \ln T + R \ln V,$$

כאשר $C_V > 0$ ו- $R > 0$ קבועים. התהליך הפיך ומתואר על ידי

$$V(T) = V_0 e^{\alpha(T-T_0)}, \quad T_0 \leq T \leq T_1,$$

כאשר $V_0 > 0$ ו- $\alpha > 0$.
חשבו את החום ההפיך

$$Q_{\text{rev}} = \int T dS$$

לאורך התהליך, בלי לבדוד שום משתנה כפונקציה של משתנה אחר במישור (P, V) .

פתרון.

עיקרון מנחה

הגודל S הוא פונקציה של שני משתנים, T ו- V . התהליך נותן לנו עקומה $(T, V(T))$. לכן החישוב המרכזי הוא כלל השרשרת של חדו"א 2, ולא החלפת משתנה חד-ממדית רגילה.

נגדיר את האנטרופיה לאורך המסלול:

$$\tilde{S}(T) = S(T, V(T)).$$

לפי כלל השרשרת הרב משתני,

$$\tilde{S}'(T) = S_T(T, V(T)) \cdot 1 + S_V(T, V(T))V'(T).$$

נחשב את הנגזרות החלקיות של S :

$$S_T(T, V) = \frac{C_V}{T}, \quad S_V(T, V) = \frac{R}{V}.$$

כעת נגזור את $V(T)$:

$$V'(T) = \alpha V_0 e^{\alpha(T-T_0)} = \alpha V(T).$$

נציב בכלל השרשרת:

$$\tilde{S}'(T) = \frac{C_V}{T} + \frac{R}{V(T)} \cdot \alpha V(T).$$

הגורם $V(T)$ מצטמצם, ולכן

$$\tilde{S}'(T) = \frac{C_V}{T} + \alpha R.$$

מכיוון שהתהליך הפיך,

$$\delta Q_{\text{rev}} = T dS.$$

כאשר הפרמטר של התהליך הוא T , זה אומר

$$Q_{\text{rev}} = \int_{T_0}^{T_1} T \tilde{S}'(T) dT.$$

נציב את הביטוי שמצאנו:

$$Q_{\text{rev}} = \int_{T_0}^{T_1} T \left(\frac{C_V}{T} + \alpha R \right) dT.$$

נפשט את האינטגרנד:

$$T \left(\frac{C_V}{T} + \alpha R \right) = C_V + \alpha RT.$$

לכן

$$Q_{\text{rev}} = \int_{T_0}^{T_1} (C_V + \alpha RT) dT.$$

נחשב:

$$Q_{\text{rev}} = C_V(T_1 - T_0) + \alpha R \left[\frac{T^2}{2} \right]_{T_0}^{T_1}.$$

ולכן

$$Q_{\text{rev}} = C_V(T_1 - T_0) + \frac{\alpha R}{2}(T_1^2 - T_0^2).$$

הנקודה החשובה היא שהמעבר לא נעשה באמצעות יעקוביאן ולא באמצעות טריק חד-ממדי בלבד. הגודל S תלוי בשני משתנים, והתהליך הוא עקומה במישור (T, V) . לכן החישוב הוא בדיוק

$$\frac{d}{dT} S(T, V(T)) = S_T + S_V V'(T),$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.5.

באותו תהליך תרמודינמי מהתרגיל הקודם, חשבו גם את העבודה

$$W = \int P dV,$$

כאשר עבור מול אחד של גז אידיאלי מתקיים

$$P(T, V) = \frac{RT}{V}.$$

הציגו את החישוב כהצבה של הדיפרנציאל dV לאורך העקומה $T \mapsto (T, V(T))$.

פתרון.**עיקרון מנחה**

העבודה $W = \int P dV$ מערבת רק את הדיפרנציאל dV , אבל הלחץ P הוא פונקציה של שני משתנים (T, V) . לכן גם כאן צריך לחשוב על העקומה במישור המצבים ולהציב בה את $P(T, V)$ ואת $V'(T)$.

לאורך התהליך נתון

$$V(T) = V_0 e^{\alpha(T-T_0)}.$$

כבר חישבנו

$$V'(T) = \alpha V(T).$$

הדיפרנציאל dV לאורך התהליך הוא

$$dV = V'(T)dT = \alpha V(T)dT.$$

כעת נציב גם את הלחץ לאורך התהליך:

$$P(T, V(T)) = \frac{RT}{V(T)}.$$

לכן

$$P(T, V(T)) dV = \frac{RT}{V(T)} \cdot \alpha V(T) dT.$$

מצמצמים את $V(T)$:

$$P(T, V(T)) dV = \alpha RT dT.$$

מכאן

$$W = \int_{T_0}^{T_1} \alpha RT dT.$$

נחשב:

$$W = \alpha R \left[\frac{T^2}{2} \right]_{T_0}^{T_1}.$$

ולכן

$$W = \frac{\alpha R}{2} (T_1^2 - T_0^2).$$

שימו לב להבדל בין שתי הדוגמאות: בחום השתמשנו בפונקציה $S(T, V)$ וגזרנו אותה לפי כלל השרשרת הרב משתני. בעבודה השתמשנו בדיפרנציאל dV , אבל הלחץ עדיין הוצב כפונקציה של שני משתנים לאורך אותה עקומה תרמודינמית.

□

ניצחון

1.3 אינטגרל פרמטרי וכלל לייבניץ

תזכורת (מההרצאה)

גזירה תחת סימן האינטגרל, גבולות קבועים. תהי $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, ונניח שגם f_t רציפה. נגדיר

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx.$$

אז F גזירה, ומתקיים

$$F'(t) = \int_a^b f_t(x, t) dx.$$

לפני שמפעילים את הטענה בודקים מי הפרמטר ומי משתנה האינטגרציה. אם הגבולות קבועים והאינטגרנד מספיק חלק, גוזרים רק את האינטגרנד לפי הפרמטר ומשאירים את גבולות האינטגרציה כפי שהם.

תזכורת (מההרצאה)

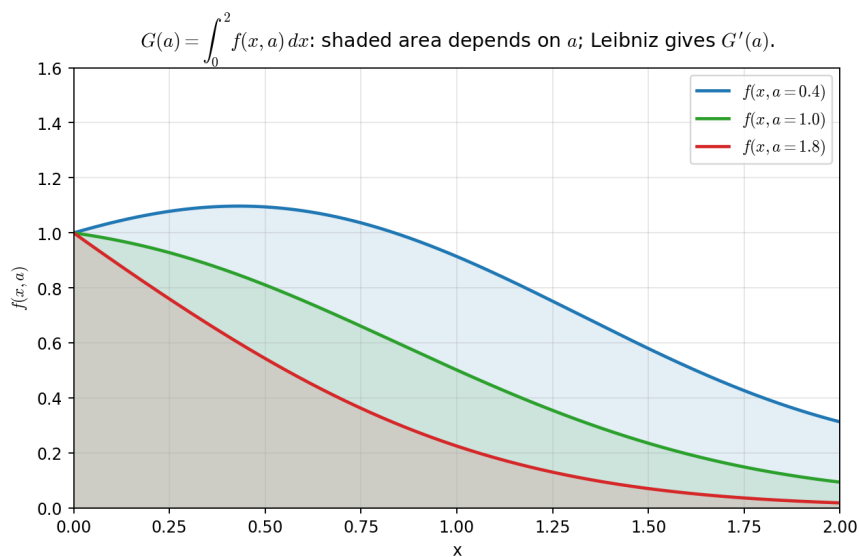
נוסחת לייבניץ עם גבולות משתנים. אם

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx,$$

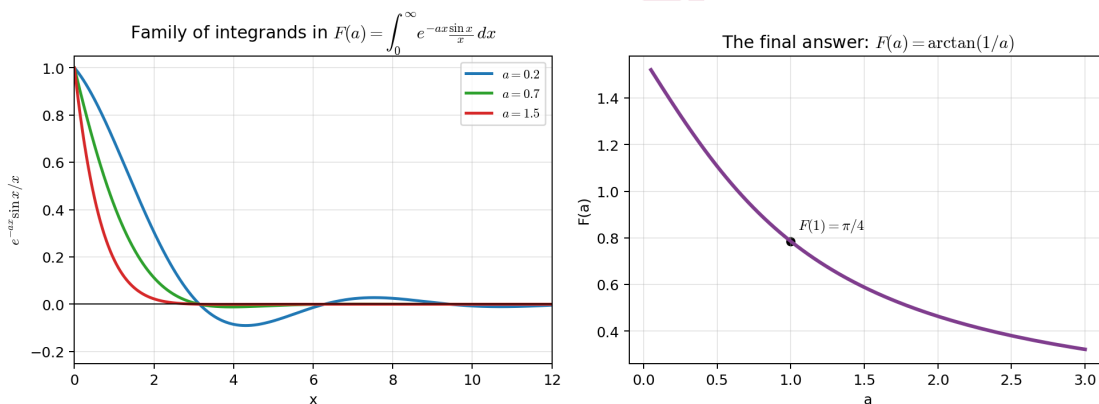
כאשר f ו- f_t רציפות ו- α, β גזירות, אז

$$F'(t) = f(\beta(t), t)\beta'(t) - f(\alpha(t), t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x, t) dx.$$

כאשר גם הגבולות תלויים בפרמטר וגם האינטגרנד תלוי בפרמטר, יש שלושה סוגי תרומות: תרומת הגבול העליון, תרומת הגבול התחתון ותרומת השינוי הפנימי של האינטגרנד. בתרגילים נסמן במפורש את שלושת האיברים לפני שנפשט.



האינטגרל מייצג שטח שתלוי בפרמטר. שינוי הפרמטר משנה את הגרף, ולכן גם את השטח.



משמאל: משפחת אינטגרנדים עבור אינטגרל פרמטרי קלאסי. מימין: הפונקציה הסופית המתקבלת אחרי הפעלת גזירה תחת סימן האינטגרל.

דוגמה 1.3.1.

לכל $a > 0$ נגדיר

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx.$$

חשבו את $F(a)$.

עיקרון מנחה

זהו אחד האינטגרלים הקלאסיים שממחישים למה צריך אינטגרל פרמטרי. האינטגרל המקורי קשה לחישוב ישיר. במקום זאת נגזור לפי הפרמטר a , נקבל אינטגרל פשוט בהרבה, ואז נחזור ל- F .

ראשית נבדוק מהו הפרמטר ומהו משתנה האינטגרציה. כאן a הוא הפרמטר, ו- x הוא משתנה האינטגרציה. נחשב את הנגזרת החלקית של האינטגרנד לפי a :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right) = -e^{-ax} \sin x.$$

האינטגרל של הנגזרת הזו מתכנס היטב לכל $a > 0$, ולכן מותר לגזור תחת סימן האינטגרל. נקבל

$$F'(a) = \int_0^\infty -e^{-ax} \sin x \, dx.$$

לכן

$$F'(a) = - \int_0^\infty e^{-ax} \sin x \, dx.$$

כעת נחשב את האינטגרל הימני. ידוע כי לכל $a > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin x \, dx = \frac{1}{1+a^2}.$$

לכן

$$F'(a) = -\frac{1}{1+a^2}.$$

נבצע אינטגרציה לפי a :

$$F(a) = C - \arctan a,$$

כאשר C הוא קבוע. כדי למצוא אותו נשתמש בהתנהגות כאשר $a \rightarrow \infty$. עבור $a \rightarrow \infty$ מתקיים $e^{-ax} \rightarrow 0$, ולכן מתקבל $F(a) \rightarrow 0$. מצד שני,

$$0 = \lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = C - \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan a = C - \frac{\pi}{2}.$$

לכן $C = \frac{\pi}{2}$. מכאן

$$F(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan a.$$

אפשר לכתוב זאת גם בצורה

$$F(a) = \arctan \left(\frac{1}{a} \right),$$

כי עבור $a > 0$ מתקיים $\arctan(1/a) = \pi/2 - \arctan a$. לכן

$$F(a) = \arctan \left(\frac{1}{a} \right).$$

תרגיל 1.3.2.

לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ נגדיר

$$G(\lambda) = \int_0^1 \frac{\arctan(\lambda x)}{x} dx.$$

הוכיחו שמותר לגזור תחת סימן האינטגרל, חשבו את $G'(\lambda)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

האינטגרל המקורי אינו אינטגרל סטנדרטי, מפני שהפונקציה $\arctan(\lambda x)/x$ אינה מזמינה הצבה רגילה. לעומת זאת, הנגזרת לפי λ מבטלת את פונקציית $\arctan$, ואז מקבלים אינטגרל רציונלי פשוט.

נגדיר את האינטגרנד

$$f(x, \lambda) = \frac{\arctan(\lambda x)}{x}.$$

הפרמטר הוא λ , ומשתנה האינטגרציה הוא x . עבור $x > 0$, נגזור לפי λ :

$$f_\lambda(x, \lambda) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1 + \lambda^2 x^2} = \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2}.$$

הנגזרת החלקית רציפה על $[0, 1] \times [-M, M]$ לכל $M > 0$, ולכן מותר לגזור תחת סימן האינטגרל. נקבל

$$G'(\lambda) = \int_0^1 \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2} dx.$$

כעת נחשב את האינטגרל הזה. אם $\lambda \neq 0$, אז

$$\int \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2} dx = \frac{1}{\lambda} \arctan(\lambda x).$$

לכן

$$G'(\lambda) = \left[\frac{1}{\lambda} \arctan(\lambda x) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\arctan \lambda}{\lambda}.$$

במקרה $\lambda = 0$, ניתן לעבור לגבול ולקבל $G'(0) = 1$, משום ש-

$$\frac{\arctan \lambda}{\lambda} \rightarrow 1 \quad (\lambda \rightarrow 0).$$

לכן

$$G'(\lambda) = \frac{\arctan \lambda}{\lambda}, \quad G'(0) = 1.$$

כמו כן, מאחר ש- $\arctan(0 \cdot x) = 0$, מתקבל

$$G(0) = 0.$$

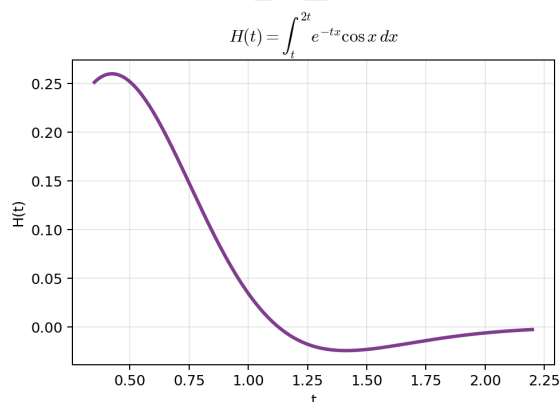
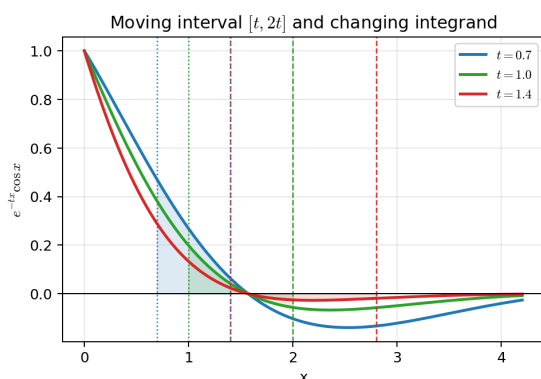
מכאן

$$G(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{\arctan s}{s} ds.$$

זו בדיוק הנקודה העקרונית: במקום לנסות לחשב ישירות את האינטגרל המקורי, שאינו נראה נוח כלל, מעבירים את הקושי למשימה פשוטה בהרבה, גזירה לפי פרמטר.

□

ניצחון



כאן גם חלון האינטגרציה $[t, 2t]$ זז עם הפרמטר, וגם האינטגרנד עצמו משתנה עם הפרמטר. לכן בנוסחת לייבניץ חייבים לכלול גם איברי שפה וגם אינטגרל של הנגזרת הפנימית.

תרגיל 1.3.3

לכל $t > 0$ נגדיר

$$H(t) = \int_t^{2t} e^{-tx} \cos x dx.$$

חשבו את $H'(t)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

בתרגיל הזה הפרמטר t מופיע בשלושה מקומות שונים: בגבול התחתון, בגבול העליון, וגם באינטגרנד $e^{-tx} \cos x$. לכן אסור לגזור רק את האינטגרנד ואסור לגזור רק את הגבולות. צריך להשתמש בנוסחת לייבניץ המלאה.

נזהה תחילה את הרכיבים של הנוסחה. משתנה האינטגרציה הוא x , והפרמטר הוא t . נגדיר

$$f(x, t) = e^{-tx} \cos x, \quad \alpha(t) = t, \quad \beta(t) = 2t.$$

לכן

$$\alpha'(t) = 1, \quad \beta'(t) = 2.$$

כעת נחשב את הנגזרת החלקית של האינטגרנד לפי t , כאשר x מוחזק קבוע:

$$f_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} (e^{-tx} \cos x) = -xe^{-tx} \cos x.$$

נוסחת לייבניץ אומרת כי

$$H'(t) = f(\beta(t), t)\beta'(t) - f(\alpha(t), t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x, t) dx.$$

נציב את $\alpha(t) = t$ ואת $\beta(t) = 2t$. תחילה איבר הגבול העליון:

$$f(2t, t)\beta'(t) = e^{-t(2t)} \cos(2t) \cdot 2 = 2e^{-2t^2} \cos(2t).$$

כעת איבר הגבול התחתון:

$$f(t, t)\alpha'(t) = e^{-t^2} \cos t \cdot 1 = e^{-t^2} \cos t.$$

לבסוף האיבר הפנימי:

$$\int_t^{2t} f_t(x, t) dx = \int_t^{2t} -xe^{-tx} \cos x dx.$$

לכן

$$H'(t) = 2e^{-2t^2} \cos(2t) - e^{-t^2} \cos t - \int_t^{2t} xe^{-tx} \cos x dx.$$

כלומר

$$H'(t) = 2e^{-2t^2} \cos(2t) - e^{-t^2} \cos t - \int_t^{2t} xe^{-tx} \cos x dx.$$

האיבר הראשון נובע מתזוזת הגבול העליון, האיבר השני נובע מתזוזת הגבול התחתון, והאינטגרל האחרון נובע מכך שהאינטגרנד עצמו משתנה כאשר t משתנה.

□

ניצחון

1.4 משפט הפונקציה הסתומה

תזכורת (מההרצאה)

משפט הפונקציה הסתומה בשני משתנים. תהי $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ב- C^1 , כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה. אם

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

אז קיימת פונקציה יחידה $y = g(x)$ בסביבה של x_0 , כך ש-

$$g(x_0) = y_0, \quad F(x, g(x)) = 0,$$

וכן

$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}.$$

בשימוש מעשי בודקים שלושה דברים: הנקודה אכן מקיימת $F = 0$, הנגזרת לפי המשתנה שרוצים לבודד אינה אפס, ואז מותר להתייחס למשוואה כאל גרף מקומי. הנוסחה לנגזרת מתקבלת ישירות מהמשפט ומשמשת בלי לפתור את המשוואה במפורש.

תזכורת (מההרצאה)

משפט הפונקציה הסתומה בשלושה משתנים. תהי $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ב- C^1 , כאשר $V \subseteq \mathbb{R}^3$ פתוחה. אם

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

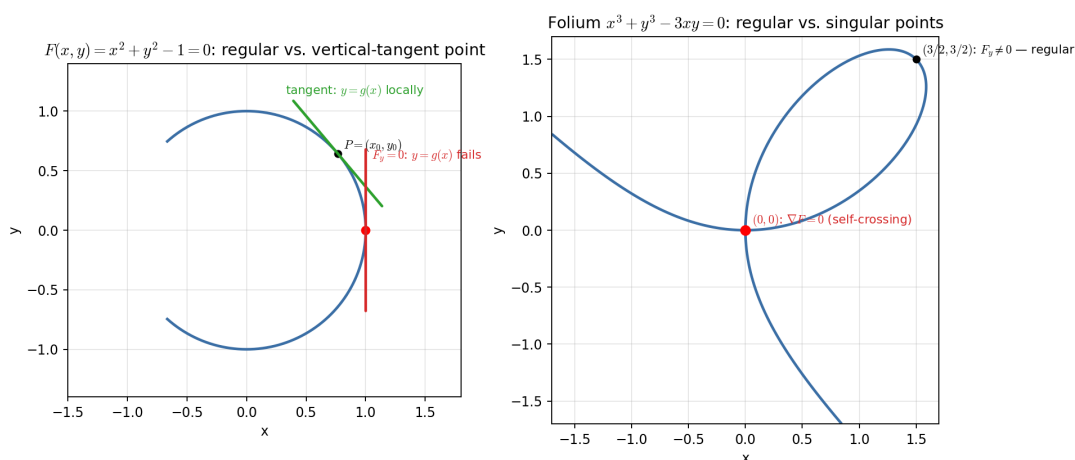
אז קיימת פונקציה $z = h(x, y)$ בסביבה של (x_0, y_0) , כך ש-

$$h(x_0, y_0) = z_0, \quad F(x, y, h(x, y)) = 0,$$

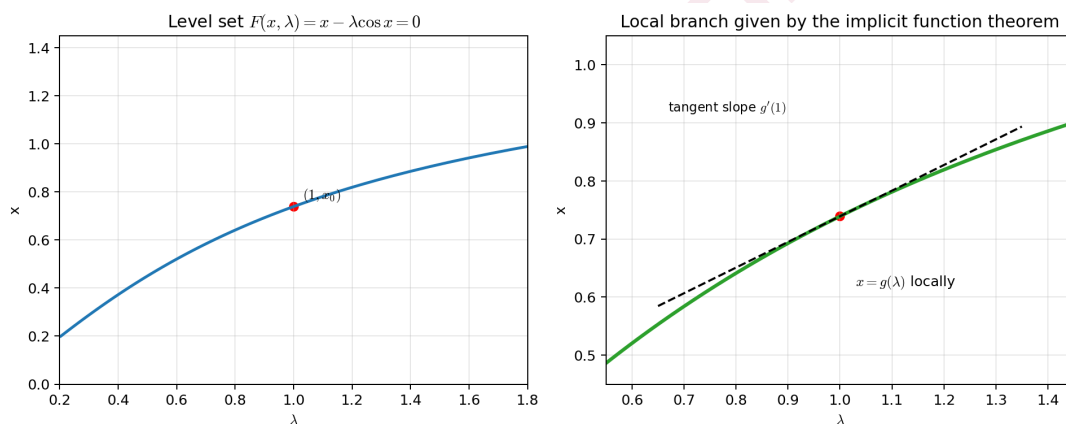
וכן

$$h_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad h_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

בשימוש מעשי בודקים שהנקודה נמצאת על המשטח ו- $F_z \neq 0$. אם התנאי מתקיים, מותר לכתוב מקומית $z = h(x, y)$ והנוסחאות של h_x, h_y נותנות את השיפועים של המשטח בלי לבודד את z בפועל.



משמאל: נקודה רגולרית לעומת נקודה שבה המשיק אנכי. מימין: דוגמה לנקודה סינגולרית שבה הגרדיאנט מתאפס, ולכן משפט הפונקציה הסתומה אינו חל.



בענף פתרונות של המשוואה $x - \lambda \cos x = 0$, משפט הפונקציה הסתומה מבטיח שבסביבת נקודה רגולרית אפשר לכתוב $x = g(\lambda)$. זהו המודל המתמטי של "ענף פתרונות" בבעיה נומרית.

תרגיל 1.4.1

נבחן את משוואת נקודת השבת

$$F(x, \lambda) = x - \lambda \cos x = 0.$$

נסמן ב- x_0 את הפתרון של $x = \cos x$, כלומר הפתרון של $F(x, 1) = 0$. ידוע ש- $x_0 \approx 0.739$. הוכיחו שקיימת פונקציה $x = g(\lambda)$ בסביבה של $\lambda = 1$, כך ש- $g(1) = x_0$.

$$F(g(\lambda), \lambda) = 0.$$

חשבו את $g'(1)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

זוהי דוגמה חשובה במיוחד: ביישומים נומריים מקבלים לעיתים ענף של פתרונות של משוואה לא ליניארית התלויה בפרמטר. משפט הפונקציה הסתומה אומר מתי אכן אפשר לדבר על ענף כזה באופן מסודר, ואף לחשב את השיפוע שלו בלי לפתור את המשוואה במפורש.

ראשית נבדוק את תנאי המשפט. נתון כי x_0 מקיים

$$x_0 - \cos x_0 = 0,$$

ולכן

$$F(x_0, 1) = x_0 - 1 \cdot \cos x_0 = 0.$$

כעת נחשב את הנגזרות החלקיות של F :

$$F_x(x, \lambda) = 1 + \lambda \sin x, \quad F_\lambda(x, \lambda) = -\cos x.$$

בנקודה $(x_0, 1)$ מתקבל

$$F_x(x_0, 1) = 1 + \sin x_0.$$

מאחר ש- $x_0 \in (0, 1)$, נקבל $\sin x_0 > 0$, ולכן בפרט

$$F_x(x_0, 1) \neq 0.$$

לכן משפט הפונקציה הסתומה חל: קיימת פונקציה $x = g(\lambda)$ בסביבה של $\lambda = 1$ כך ש-

$$g(1) = x_0, \quad F(g(\lambda), \lambda) = 0.$$

כדי למצוא את הנגזרת נגזור את הזהות

$$F(g(\lambda), \lambda) = 0$$

לפי λ . נקבל

$$F_x(g(\lambda), \lambda)g'(\lambda) + F_\lambda(g(\lambda), \lambda) = 0.$$

לכן

$$g'(\lambda) = -\frac{F_\lambda(g(\lambda), \lambda)}{F_x(g(\lambda), \lambda)}.$$

בפרט,

$$g'(1) = -\frac{F_\lambda(x_0, 1)}{F_x(x_0, 1)} = -\frac{-\cos x_0}{1 + \sin x_0}.$$

לכן

$$g'(1) = \frac{\cos x_0}{1 + \sin x_0}.$$

מאחר ש- $x_0 = \cos x_0$, אפשר גם לכתוב

$$g'(1) = \frac{x_0}{1 + \sin x_0}.$$

זו אינפורמציה חשובה: היא מתארת את רגישות הפתרון לשינוי בפרמטר λ , בלי שיהיה צורך לפתור את המשוואה מחדש לכל ערך של λ .

□

ניצחון

תרגיל 1.4.2.

במעגל חשמלי לא ליניארי מתקיים הקשר

$$RI + \alpha I^3 - V = 0,$$

כאשר $R > 0$ ו- $\alpha > 0$ קבועים, V הוא המתח, ו- I הוא הזרם. הראו שליד כל נקודת עבודה (I_0, V_0) המקיימת

$$RI_0 + \alpha I_0^3 - V_0 = 0,$$

אפשר לכתוב את הזרם כפונקציה של המתח, כלומר $I = I(V)$, וחשבו את הנגזרת $\frac{dI}{dV}$.

פתרון.

עיקרון מנחה

המשוואה של המעגל אינה ניתנת בדרך כלל לפתרון מפורש נוח. אבל לניתוח מקומי של המעגל אין צורך בפתרון מפורש. די להפעיל את משפט הפונקציה הסתומה.

נגדיר

$$F(I, V) = RI + \alpha I^3 - V.$$

נבדוק את הנגזרת לפי I :

$$F_I(I, V) = R + 3\alpha I^2.$$

מאחר ש- $R > 0$ ו- $\alpha > 0$, מתקיים לכל I

$$F_I(I, V) = R + 3\alpha I^2 > 0.$$

בפרט,

$$F_I(I_0, V_0) \neq 0.$$

לכן משפט הפונקציה הסתומה חל בכל נקודת עבודה, ולכן קיימת בסביבה של V_0 פונקציה $I = I(V)$ כך ש-

$$F(I(V), V) = 0.$$

כעת נגזור את הזהות לפי V :

$$F_I(I(V), V) \cdot I'(V) + F_V(I(V), V) = 0.$$

כאן

$$F_V(I, V) = -1.$$

לכן

$$(R + 3\alpha I(V)^2)I'(V) - 1 = 0.$$

ומכאן

$$I'(V) = \frac{1}{R + 3\alpha I(V)^2}.$$

בפרט, בנקודת העבודה (I_0, V_0) ,

$$\frac{dI}{dV}(V_0) = \frac{1}{R + 3\alpha I_0^2}.$$

מבחינה הנדסית, זהו השיפוע המקומי של עקומת הזרם-מתח. זהו הגודל שמשמש לניתוח רגישות ולליניאריזציה של המערכת ליד נקודת העבודה.

□

ניצחון

1.5 מישור משיק, משטחי רמה וגרדיאנט

הגדרה פורמלית

אם $z = f(x, y)$, אז המישור המשיק בנקודה $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ הוא

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

הגדרה פורמלית

מישור משיק למשטח סתום.

אם המשטח נתון על ידי $F(x, y, z) = 0$, ואם $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, אז $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ הוא וקטור נורמלי, והמישור המשיק הוא

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

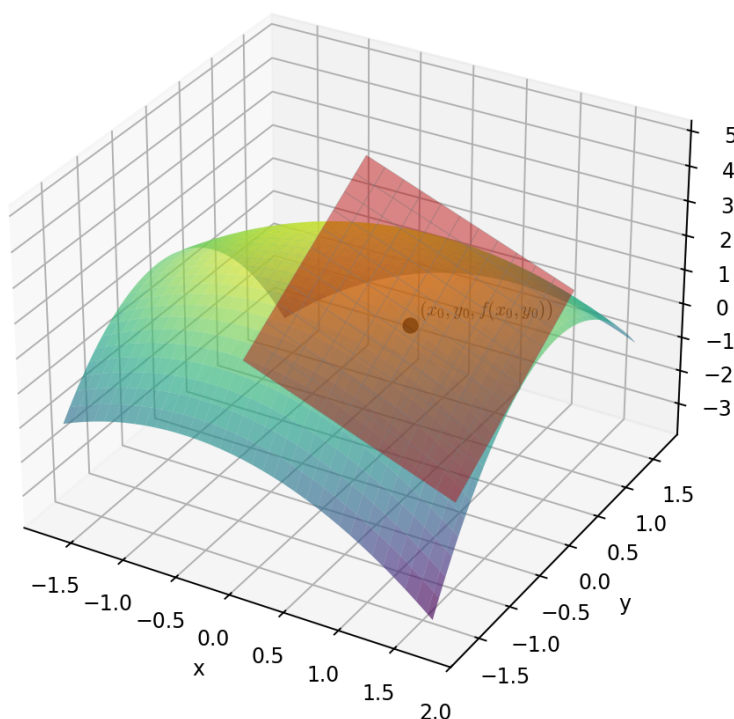
תזכורת (מההרצאה)

הגרדיאנט ניצב לקבוצת רמה. אם F דיפרנציאבילית ו- $\gamma(t)$ היא עקומה שמקיימת $F(\gamma(t)) = c$, אז

$$\nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

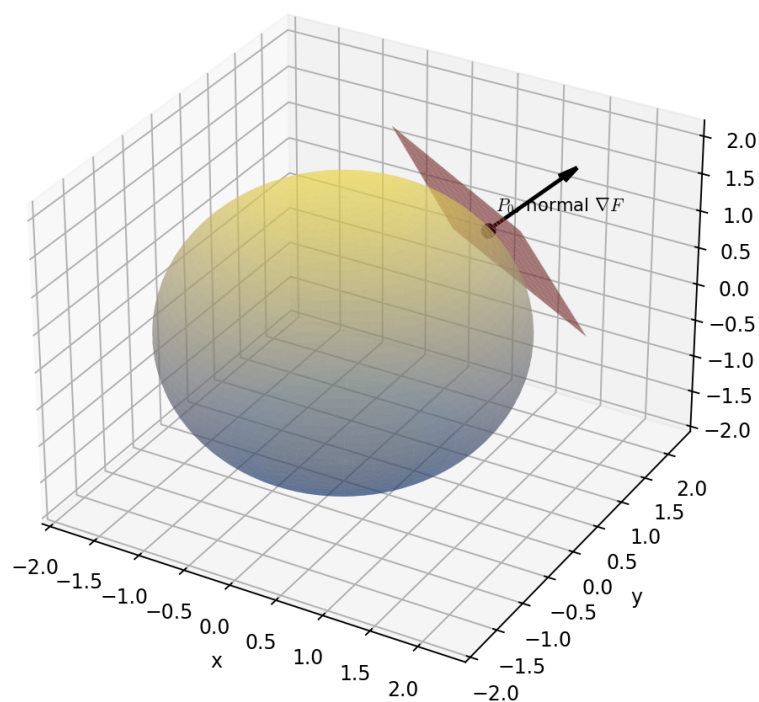
כאשר נתונה קבוצת רמה, מחשבים את ∇F בנקודה רגולרית ומשתמשים בו כווקטור נורמלי. במישור הוא ניצב למשיק לקו הרמה, ובמרחב הוא ניצב למישור המשיק למשטח הרמה.

Tangent plane to $z = f(x, y)$ at (x_0, y_0)

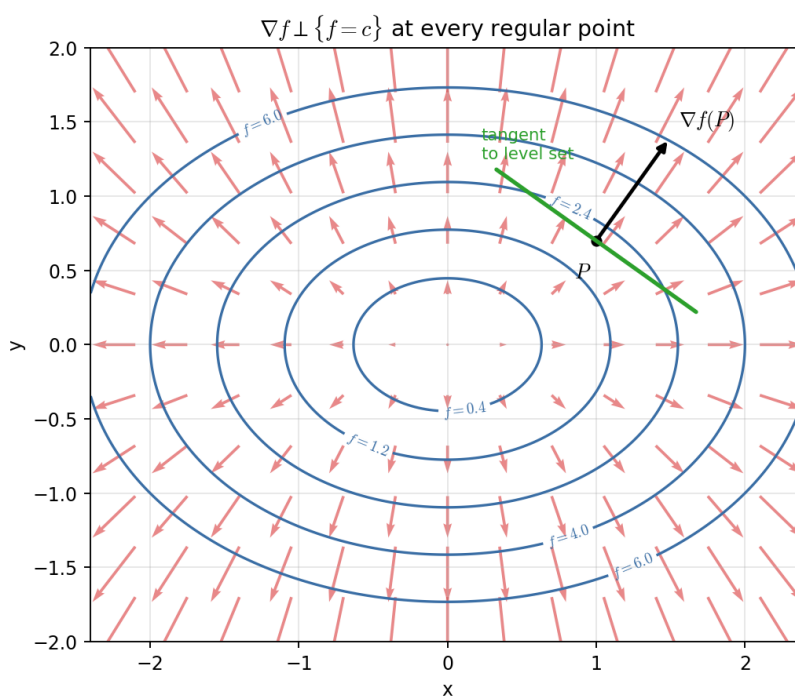


מישור משיק לגרף מפורש: זהו הקירוב הליניארי של המשטח ליד נקודת ההשקה.

Tangent plane to implicit surface $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

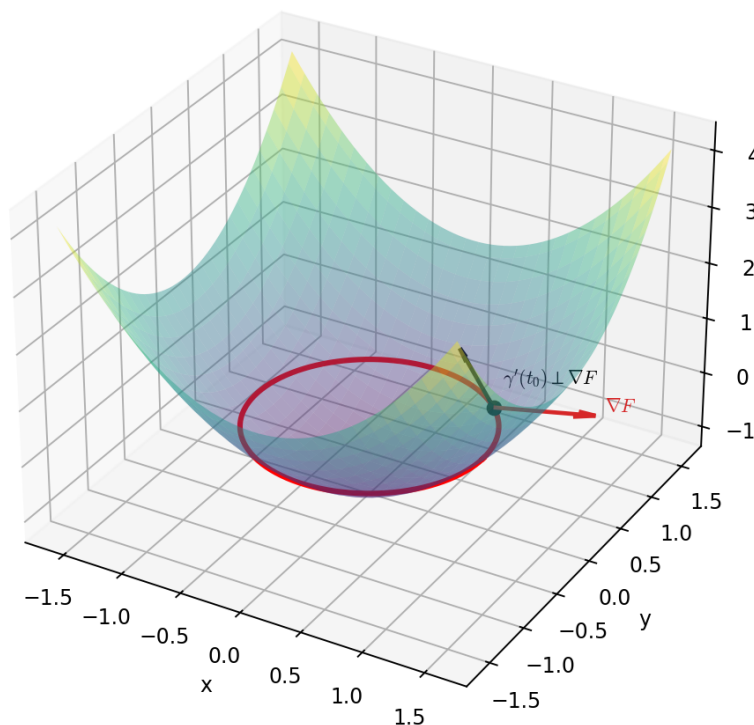


מישור משיק למשטח סתום: הגרדיאנט משמש כווקטור נורמלי למשטח.



במישור, הגרדיאנט ניצב לקו רמה בכל נקודה רגולרית.

Curve $\gamma(t)$ on $\{F=c\}$: $\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = \nabla F \cdot \gamma' = 0$



במרחב, אותה טענה נשאר נכונה: הגרדיאנט ניצב לכל וקטור משיק על משטח הרמה.

תרגיל 1.5.1

נתון המשטח הסתום

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z + xyz - 2 = 0.$$

הוכיחו שבסביבה של הנקודה $(1, 1, 0)$ אפשר לכתוב $z = h(x, y)$. חשבו את $h_x(1, 1)$, את $h_y(1, 1)$, ואת משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה זו.

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו שילוב טבעי של משפט הפונקציה הסתומה עם מישור משיק. תחילה נבדוק את תנאי המשפט, אחר כך נחשב את הנגזרות של h , ולבסוף נכתוב את המישור המשיק בעזרת הגרדיאנט של F .

ראשית נוודא שהנקודה אכן נמצאת על המשטח:

$$F(1, 1, 0) = 1^2 + 1^2 + 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 = 0.$$

כעת נחשב את הנגזרות החלקיות של F :

$$F_x = 2x + yz, \quad F_y = 2y + xz, \quad F_z = 1 + xy.$$

בנקודה $(1, 1, 0)$ מתקבל

$$F_x(1, 1, 0) = 2, \quad F_y(1, 1, 0) = 2, \quad F_z(1, 1, 0) = 2.$$

בפרט,

$$F_z(1, 1, 0) \neq 0.$$

לכן משפט הפונקציה הסתומה חל, וקיימת פונקציה $z = h(x, y)$ בסביבה של $(1, 1)$ כך ש-

$$F(x, y, h(x, y)) = 0.$$

נשתמש בנוסחאות של המשפט:

$$h_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad h_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

לכן בנקודה $(1, 1)$ נקבל

$$h_x(1, 1) = -\frac{2}{2} = -1, \quad h_y(1, 1) = -\frac{2}{2} = -1.$$

כעת נכתוב את משוואת המישור המשיק. הווקטור הנורמלי הוא

$$\nabla F(1, 1, 0) = (2, 2, 2).$$

לכן המישור המשיק הוא

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 0) = 0.$$

נחלק ב-2, ונקבל

$$(x - 1) + (y - 1) + z = 0.$$

כלומר

$$x + y + z = 2.$$

בנוסף,

$$h_x(1, 1) = -1, \quad h_y(1, 1) = -1.$$

המשמעות הגיאומטרית היא שליד $(1, 1, 0)$ המשטח נראה כמו הגרף הליניארי $z \approx 2 - x - y$.

□

ניצחון

תרגיל 1.5.2.

נתונה הפונקציה

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + xy).$$

מצאו את משוואת המישור המשיק לגרף $z = f(x, y)$ בנקודה $(1, 1, f(1, 1))$, והשתמשו בו כדי לקרב את הערך של $f(1.1, 0.9)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

כאן המשטח נתון בצורה מפורשת, ולכן המישור המשיק מתקבל ישירות מן הנגזרות החלקיות של f . לאחר מכן נשתמש במישור המשיק כקירוב ליניארי.

ראשית נחשב את ערך הפונקציה בנקודה:

$$f(1, 1) = \ln(1 + 1 + 1) = \ln 3.$$

כעת נחשב נגזרות חלקיות:

$$f_x(x, y) = \frac{2x + y}{1 + x^2 + xy}, \quad f_y(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + xy}.$$

נציב $(1, 1)$:

$$f_x(1, 1) = \frac{2 + 1}{3} = 1, \quad f_y(1, 1) = \frac{1}{3}.$$

לכן המישור המשיק הוא

$$z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1).$$

כלומר

$$z = \ln 3 + (x - 1) + \frac{1}{3}(y - 1).$$

זהו המישור המבוקש:

$$z = \ln 3 + (x - 1) + \frac{1}{3}(y - 1).$$

כעת נקרב את הערך ב- $(1.1, 0.9)$. כאן

$$\Delta x = 0.1, \quad \Delta y = -0.1.$$

לכן

$$f(1.1, 0.9) \approx \ln 3 + 1 \cdot 0.1 + \frac{1}{3}(-0.1).$$

נקבל

$$f(1.1, 0.9) \approx \ln 3 + 0.1 - \frac{0.1}{3} = \ln 3 + \frac{1}{15}.$$

כלומר

$$f(1.1, 0.9) \approx \ln 3 + 0.0667.$$

החשיבות של המישור המשיק היא בכך שהוא מחליף פונקציה לא ליניארית בקירוב ליניארי פשוט לחישוב.

□

ניצחון

1.6 כלל השרשרת ושינוי משתנים-עוד תרגילים

תרגיל 1.6.1

תרגיל בסיסי:

יהי $f(x, y, z) = 3x^2 - y + 8z^3$ כאשר $x(t) = 2t, y(t) = t^2, z(t) = t$ חשבו $\frac{\partial f}{\partial t}$

פתרון.

1. אם נציב את התלויות במפורש נקבל:

$$u(t) = f(x, y, z) \circ (x(t), y(t), z(t)) = 12t^2 - t^2 + 8t^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{du}{dt} = 22t + 24t^2$$

2. אם נשתמש בכלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$6x \Big|_{x=x(t)} \cdot 2 + (-1) \cdot \Big|_{y=y(t)} \cdot 2t + 24z^2 \Big|_{z=z(t)} \cdot 1 = 24t - 2t + 24t^2 = 22t + 24t^2$$

□

ניצחון

תרגיל 1.6.2.

תהא $f(x, y)$ גזירה, נגדיר:

$$g(u, v) = f(3u - v, u^2 + v)$$

ונתונה הטבלה:

(x, y)	$f(x, y)$	$g(x, y)$	$f'_x(x, y)$	$f'_y(x, y)$
$(2, -1)$	6	-7	1	9
$(7, 3)$	4	2	-3	5

בהנתן:

$$f'_x(7, 3) = 1, f'_y(7, 3) = 2$$

חשבו את:

$$\frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(2,-1)}, \frac{\partial g}{\partial v} \Big|_{(u,v)=(2,-1)}$$

פתרון.

נשים לב כי אם נסמן $x(u, v) = 3u - v, y(u, v) = u^2 + v$ אז x, y גזירות, ולכן ניתן להשתמש בכלל השרשרת:

$$\frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(2,-1)} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(2,-1)} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(2,-1)}$$

נחשב:

$$x(2, -1) = 3(2) - (-1) = 7, y(2, -1) = 2^2 - 1 = 3$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(2,-1)} = 3, \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(2,-1)} = 2u = 4$$

אז:

$$\frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(2,-1)} = f'_x(7, 3) \cdot 3 + f'_y(7, 3) \cdot 4 = 3 + 4 \cdot 2 = 11$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} \Big|_{(u,v)=(2,-1)}$$

אותו דבר נעשה עבור

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v} \Big|_{(u,v)=(2,-1)} &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \frac{\partial x}{\partial v} \Big|_{(u,v)=(2,-1)} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(x(2,-1),y(2,-1))} \frac{\partial y}{\partial v} \Big|_{(u,v)=(2,-1)} \\ &= f'_x(7, 3) \cdot (-1) + f'_y(7, 3) \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.6.3.

נתונה הפונקציה $f(x, y)$ המקיימת את המשוואה

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

ידוע בנוסף כי כל הנגזרות החלקיות השניות רציפות. נגדיר פונקציה חדשה $F(u, v) = f(u+v, u-v)$. הראו כי מתקיים

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = 0.$$

פתרון.

נגדיר את המשתנים:

$$x = u + v, \quad y = u - v.$$

נחשב את הנגזרות החלקיות של F :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

נחשב את הנגזרת השנייה:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

נחשב כל נגזרת חלקית בנפרד:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}.$$

בפירוט:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}.$$

מהנתון:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

ומהעובדה כי כל הנגזרות החלקיות השניות רציפות נובע שאין משמעות לסדר הגזירה:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.6.4.

נתונות פונקציות חלקות כלשהם במשתנה אחד שהינם $f(r), g(r)$ שהן שייכות למחלקה $C^\infty(\mathbb{R})$ נגדיר את פונקציית הגל הכללית:

$$\Psi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

הוכח כי מתקיים:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}$$

הערה: זה מד"ח המתארת תנועה כללית של גלים במימדים 1+1

פתרון.

נשתמש בכלל השרשרת והפונקציות f, g גזירות פעמיים והארגומנטים שלהן גזירים, ולכן תנאים מספיקים לשימוש בכלל השרשרת. נחשב:

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = f'(x - vt) \cdot \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} + g'(x + vt) \cdot \frac{\partial(x + vt)}{\partial x} = f' + g'$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = f''(x - vt) + g''(x + vt)$$

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = f'(x - vt) \cdot (-v) + g'(x + vt) \cdot v = -vf' + vg'$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = -v^2 f''(x - vt) + v^2 g''(x + vt) = v^2 f'' + v^2 g''$$

ולכן:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = f'' + g'' = \frac{1}{v^2} \cdot v^2 (f'' + g'') = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.6.5.

בגלקסיית הזברות הג'ינג'יות ובשמה 58 – J המאכל המסורתי הינו סביח. חוקרים מכדור הארץ רצו לגלות איך מכינים את הסביח המושלם בגלקסיה זו. החוקרים מדדו את גודל העבודה ביחידות של עבודה וקיבלו: $W = K \cdot T \cdot z$ כאשר:

1. K זהו קבוע החצילים בגלקסיית הזברות הג'ינג'יות.

2. $T(x, y, z) = 58 - e^{-|r|^2}$ זוהי פונקציית הטחינה שתלויה במסלול הכנתה כאשר $\vec{r} = (x, y, z)$.

כאשר t משמעותו היא הזמן, בבקשה חשבו את ההספק לאורך מסלול הכנת הטחינה הבאה:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

בזמן $t = 0$.

מסלול זה נקרא מסלול בורגי.

פתרון.

□

ניצחון

נחשב את הנגזרת $\frac{dW}{dt}$ כאשר $W(t) = K \cdot T(\vec{r}(t)) \cdot z(t)$. נשתמש בכלל השרשרת (תנאים מתקיימים), ונזכור ש- KTz הוא מכפלה $u = K \cdot T \cdot z$, ולכן נגזור כמו כלל המכפלה:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

בנוסף נבחין כי:

$$T(x, y, z) = 58 - e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

לכן:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial(KTz)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial(KTz)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial(KTz)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

מתוך $KTz = K \cdot T(x, y, z) \cdot z$, נגזור ונקבל:

$$\begin{aligned} &= 2Kxe^{-(x^2+y^2+z^2)} \cdot (-\sin t) + 2Kye^{-(x^2+y^2+z^2)} \cdot (\cos t) \\ &\quad + K \left[\left(58 - e^{-(x^2+y^2+z^2)} \right) + 2z^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)} \right] \cdot 1 \end{aligned}$$

שימו לב!! זוהי פונקציה של t בלבד ולכן לא סיימנו!

נציב לנגזרת את מיקומו של החלקיק בזמן $t = 0$, נתון ע"י $\vec{r}(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 0)$. נחשב:

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{t=0} = 0 + 0 + K(58 - e^{-1}) = K(58 - e^{-1})$$

תרגיל 1.6.6

פונקציה $f(x, y)$ תקרא הומוגנית מסדר p אם היא מקיימת לכל $\lambda > 0$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x, y)$. נתון כי f דיפרנציאבילית בכל המישור. הוכח:

$$f \text{ הומוגנית מסדר } p \text{ (אם ורק אם)} \iff (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (x, y) = pf(x, y)$$

פתרון.

נניח כלל השרשרת, תנאים מתקיימים.

נגזור את שני אגפי השוויון $f(tx, ty) = t^p f(x, y)$ לפי t :

$$f_x(tx, ty) \cdot x + f_y(tx, ty) \cdot y = pt^{p-1} f(x, y)$$

נציב $t = 1$, ונקבל:

$$(f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (x, y) = pf(x, y)$$

כדי להוכיח את הכיוון ההפוך, נגדיר:

$$g(t) = t^{-p} f(tx, ty)$$

נגזור (עם כלל השרשרת):

$$\frac{dg}{dt} = -pt^{-p-1} f(tx, ty) + t^{-p} (f_x(tx, ty) \cdot x + f_y(tx, ty) \cdot y)$$

נשתמש בהנחת הקשר:

$$(f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (x, y) = pf(x, y)$$

ונקבל:

$$\frac{dg}{dt} = -pt^{-p-1} f(tx, ty) + t^{-p} \cdot \frac{pf(tx, ty)}{t} = 0$$

ולכן $g(t)$ פונקציה קבועה, כלומר:

$$t^{-p} f(tx, ty) = g(1) = f(x, y) \Rightarrow f(tx, ty) = t^p f(x, y)$$

וזו בדיוק הגדרת ההומוגניות.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.7

תהי $z = f(u, v)$ פונקציה דיפרנציאבילית, כאשר

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

1. חשבו את z_x, z_y באמצעות f_u, f_v .

2. הוכיחו את הזהות

$$z_x^2 + z_y^2 = e^{2x}(f_u^2 + f_v^2).$$

3. פרשו גיאומטרית את הזהות.

פתרון.**עיקרון מנחה**

המעבר $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$ היא מעבר מלוגריתם-רדיוס וזווית למישור. הנגזרות לפי x ולפי y מאונכות ובאותו אורך e^x , ולכן מתקבלת זהות נורמות.

נחשב את הנגזרות של u, v :

$$u_x = e^x \cos y = u, \quad u_y = -e^x \sin y = -v,$$

$$v_x = e^x \sin y = v, \quad v_y = e^x \cos y = u.$$

לפי כלל השרשרת,

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x = f_u u + f_v v,$$

$$z_y = f_u u_y + f_v v_y = f_u(-v) + f_v u = -v f_u + u f_v.$$

כעת נחשב את סכום הריבועים באופן מלא:

$$z_x^2 = (u f_u + v f_v)^2 = u^2 f_u^2 + 2uv f_u f_v + v^2 f_v^2,$$

$$z_y^2 = (-v f_u + u f_v)^2 = v^2 f_u^2 - 2uv f_u f_v + u^2 f_v^2.$$

נחבר:

$$z_x^2 + z_y^2 = (u^2 + v^2) f_u^2 + (u^2 + v^2) f_v^2.$$

כעת

$$u^2 + v^2 = e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} (\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x}.$$

לכן

$$z_x^2 + z_y^2 = e^{2x}(f_u^2 + f_v^2).$$

גיאומטרית, שתי נגזרות המעבר הן

$$(u_x, v_x) = (u, v), \quad (u_y, v_y) = (-v, u).$$

המכפלה הפנימית שלהן היא

$$(u, v) \cdot (-v, u) = -uv + uv = 0,$$

ולשתיהן נורמה

$$\sqrt{u^2 + v^2} = e^x.$$

כלומר המעבר מותחת מקומית אורכים בפקטור e^x ושומרת זוויות; זה מסביר מדוע גודל הגרדיאנט מוכפל ב- e^x .

□

ניצחון

תרגיל 1.6.8

נתונה פונקציה $z(t) = f(x(t), y(t))$ כאשר

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2), \quad x(t) = e^t \cos t, \quad y(t) = e^t \sin t.$$

חשבו את $z'(t)$ בשתי דרכים: ישירות לאחר הצבה, ובעזרת כלל השרשרת. ודאו שהתוצאות זהות.

פתרון.

עיקרון מנחה

המסלול נבחר כך ש- $x(t)^2 + y(t)^2 = e^{2t}$. בדרך הישירה התלות הזוויתית נעלמת; בדרך כלל השרשרת צריך לראות את אותה התבטלות דרך המכפלה הפנימית.

דרך ישירה: נחשב

$$x(t)^2 + y(t)^2 = e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t = e^{2t}.$$

לכן

$$z(t) = \ln(1 + e^{2t}).$$

נגזור:

$$z'(t) = \frac{1}{1 + e^{2t}} \cdot 2e^{2t} = \frac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}}.$$

כעת בדרך כלל השרשרת. תחילה

$$f_x = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad f_y = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$

נגזרות המסלול הן

$$x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t),$$

$$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t).$$

לפי כלל השרשרת,

$$z'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

נציב:

$$z'(t) = \frac{2xx' + 2yy'}{1 + x^2 + y^2}.$$

נחשב את המונה:

$$xx' = e^t \cos t \cdot e^t (\cos t - \sin t) = e^{2t} (\cos^2 t - \sin t \cos t),$$

$$yy' = e^t \sin t \cdot e^t (\sin t + \cos t) = e^{2t} (\sin^2 t + \sin t \cos t).$$

לכן

$$xx' + yy' = e^{2t} (\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{2t}.$$

בנוסף $1 + x^2 + y^2 = 1 + e^{2t}$. לכן

$$z'(t) = \frac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}}.$$

קיבלנו את אותה תוצאה:

$$z'(t) = \frac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}}.$$

□

ניצחון

נוצר על ידי חן גדי