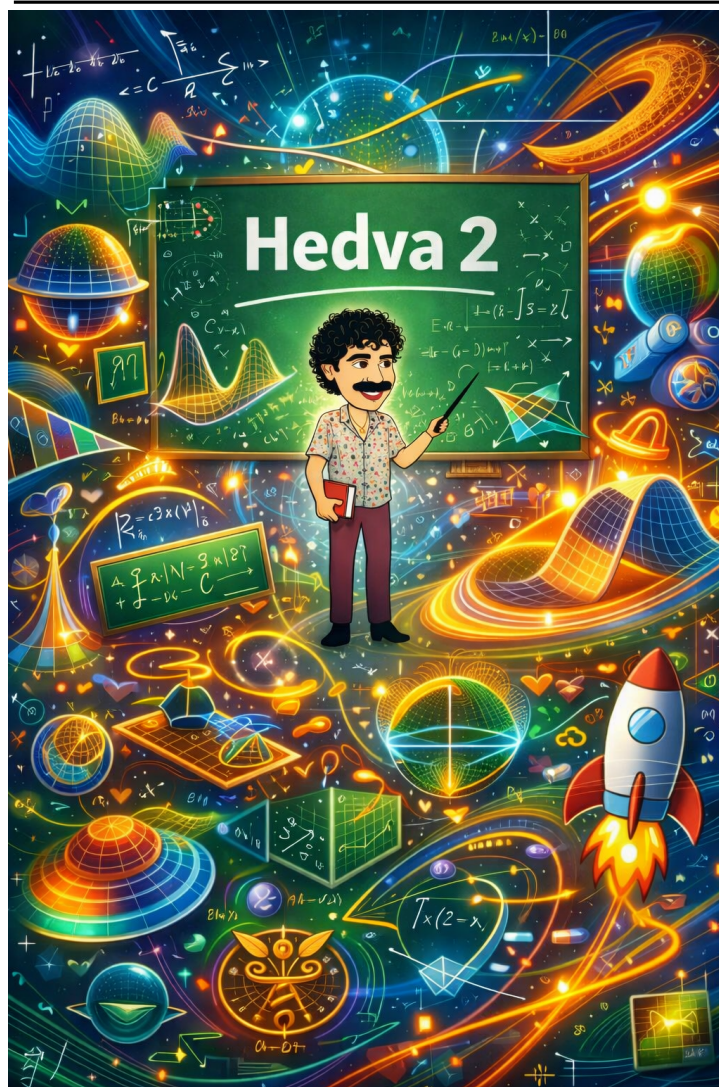


חדו"א 2 להנדסות

סיכומים ותרגולים



נערך ונכתב על ידי חן גדי ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המצויב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

נוצר על ידי חוג גדי

תוכן העניינים

2	1 תרגול 8-משוואות סתומות, קיצון מוחלט, אילוצים וכופלי לגרנז
2	1.1 משפט הפונקציה הסתומה
7	1.2 מישור משיק, משטחי רמה וגרדיאנט
14	1.3 קיצון מקומי, משפט פרמה ונקודת אוקף
16	1.4 קיצון מוחלט על קומפקט
17	1.5 אילוץ אחד וכופלי לגרנז'
20	1.6 תרגילים

תרגול 8 - משוואות סתומות, קיצון מוחלט, אילוצים וכופלי לגרנז

1.1 משפט הפונקציה הסתומה

תזכורת (מההרצאה)

משפט הפונקציה הסתומה בשני משתנים. תהי $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ב- C^1 , כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה. אם

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

אז קיימת פונקציה יחידה $y = g(x)$ בסביבה של x_0 , כך ש-

$$g(x_0) = y_0, \quad F(x, g(x)) = 0,$$

וכן

$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}.$$

הערה קטנה ומועילה

פרקטית, בודקים שלושה דברים: הנקודה אכן מקיימת $F = 0$, הנגזרת לפי המשתנה שרוצים לבדוד אינה אפס, ואז מותר להתייחס למשוואה כאל גרף מקומי. הנוסחה לנגזרת מתקבלת ישירות מהמשפט ומשמשת בלי לפתור את המשוואה במפורש.

תזכורת (מההרצאה)

משפט הפונקציה הסתומה בשלושה משתנים. תהי $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ב- C^1 , כאשר $V \subseteq \mathbb{R}^3$ פתוחה. אם

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

אז קיימת פונקציה $z = h(x, y)$ בסביבה של (x_0, y_0) , כך ש-

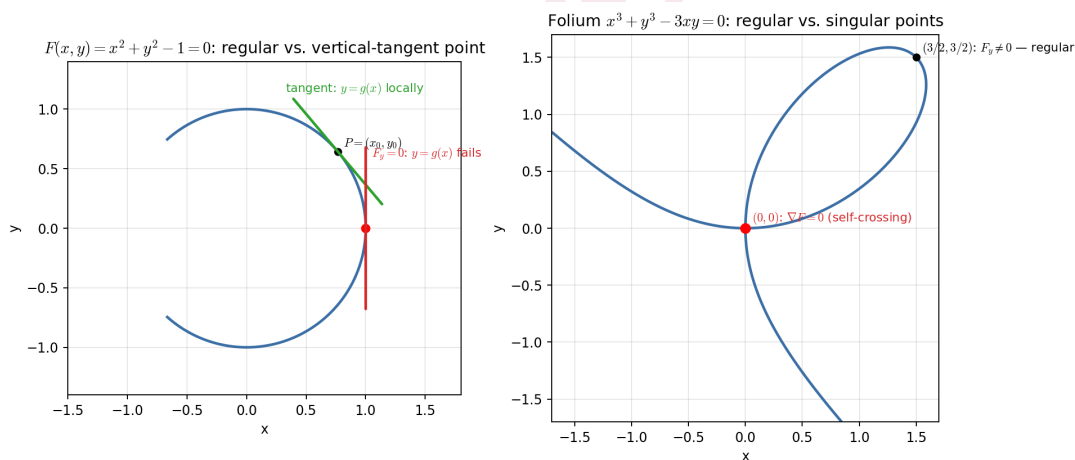
$$h(x_0, y_0) = z_0, \quad F(x, y, h(x, y)) = 0,$$

וכן

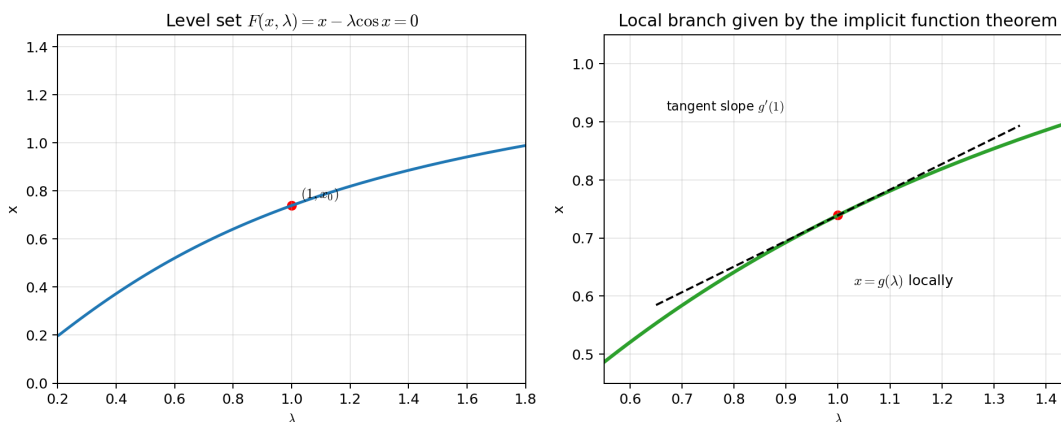
$$h_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad h_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

הערה קטנה ומועילה

פרקטית, בודקים שהנקודה נמצאת על המשטח וש- $F_z \neq 0$. אם התנאי מתקיים, מותר לכתוב מקומית $z = h(x, y)$, והנוסחאות של h_x, h_y נותנות את השיפועים של המשטח בלי לבדוד את z בפועל.



משמאל: נקודה רגולרית לעומת נקודה שבה המשיק אנכי. מימין: דוגמה לנקודה סינגולרית שבה הגרדיאנט מתאפס, ולכן משפט הפונקציה הסתומה אינו חל.



בענף פתרונות של המשוואה $x - \lambda \cos x = 0$, משפט הפונקציה הסתומה מבטיח שבסביבת נקודה רגולרית אפשר לכתוב $x = g(\lambda)$. זהו המודל המתמטי של "ענף פתרונות" בבעיה נומרית.

תרגיל 1.1.1.

נבחן את משוואת נקודת השבת

$$F(x, \lambda) = x - \lambda \cos x = 0.$$

נסמן ב- x_0 את הפתרון של $x = \cos x$, כלומר הפתרון של $F(x, 1) = 0$. ידוע ש- $x_0 \approx 0.739$. הוכיחו שקיימת פונקציה $x = g(\lambda)$ בסביבה של $\lambda = 1$, כך ש- $g(1) = x_0$.

$$F(g(\lambda), \lambda) = 0.$$

חשבו את $g'(1)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

זוהי דוגמה חשובה במיוחד: ביישומים נומריים מקבלים לעיתים ענף של פתרונות של משוואה לא ליניארית התלויה בפרמטר. משפט הפונקציה הסתומה אומר מתי אכן אפשר לדבר על ענף כזה באופן מסודר, ואף לחשב את השיפוע שלו בלי לפתור את המשוואה במפורש.

ראשית נבדוק את תנאי המשפט. נתון כי x_0 מקיים

$$x_0 - \cos x_0 = 0,$$

ולכן

$$F(x_0, 1) = x_0 - 1 \cdot \cos x_0 = 0.$$

כעת נחשב את הנגזרות החלקיות של F :

$$F_x(x, \lambda) = 1 + \lambda \sin x, \quad F_\lambda(x, \lambda) = -\cos x.$$

בנקודה $(x_0, 1)$ מתקבל

$$F_x(x_0, 1) = 1 + \sin x_0.$$

מאחר ש- $x_0 \in (0, 1)$, נקבל $\sin x_0 > 0$, ולכן בפרט

$$F_x(x_0, 1) \neq 0.$$

לכן משפט הפונקציה הסתומה חל: קיימת פונקציה $x = g(\lambda)$ בסביבה של $\lambda = 1$ כך ש-

$$g(1) = x_0, \quad F(g(\lambda), \lambda) = 0.$$

כדי למצוא את הנגזרת נגזור את הזהות

$$F(g(\lambda), \lambda) = 0$$

לפי λ . נקבל

$$F_x(g(\lambda), \lambda)g'(\lambda) + F_\lambda(g(\lambda), \lambda) = 0.$$

לכן

$$g'(\lambda) = -\frac{F_\lambda(g(\lambda), \lambda)}{F_x(g(\lambda), \lambda)}.$$

בפרט,

$$g'(1) = -\frac{F_\lambda(x_0, 1)}{F_x(x_0, 1)} = -\frac{-\cos x_0}{1 + \sin x_0}.$$

לכן

$$g'(1) = \frac{\cos x_0}{1 + \sin x_0}.$$

מאחר ש- $x_0 = \cos x_0$, אפשר גם לכתוב

$$g'(1) = \frac{x_0}{1 + \sin x_0}.$$

זו אינפורמציה חשובה: היא מתארת את רגישות הפתרון לשינוי בפרמטר λ , בלי שיהיה צורך לפתור את המשוואה מחדש לכל ערך של λ .

□

ניצחון

תרגיל 1.1.2.

במעגל חשמלי לא ליניארי מתקיים הקשר

$$RI + \alpha I^3 - V = 0,$$

כאשר $R > 0$ ו- $\alpha > 0$ קבועים, V הוא המתח, ו- I הוא הזרם. הראו שליד כל נקודת עבודה (I_0, V_0)

המקיימת

$$RI_0 + \alpha I_0^3 - V_0 = 0,$$

אפשר לכתוב את הזרם כפונקציה של המתח, כלומר $I = I(V)$, וחשבו את הנגזרת $\frac{dI}{dV}$.

פתרון.

עיקרון מנחה

המשוואה של המעגל אינה ניתנת בדרך כלל לפתרון מפורש נוח. אבל לניתוח מקומי של המעגל אין צורך בפתרון מפורש. די להפעיל את משפט הפונקציה הסתומה.

נגדיר

$$F(I, V) = RI + \alpha I^3 - V.$$

נבדוק את הנגזרת לפי I :

$$F_I(I, V) = R + 3\alpha I^2.$$

מאחר ש- $R > 0$ ו- $\alpha > 0$, מתקיים לכל I

$$F_I(I, V) = R + 3\alpha I^2 > 0.$$

בפרט,

$$F_I(I_0, V_0) \neq 0.$$

לכן משפט הפונקציה הסתומה חל בכל נקודת עבודה, ולכן קיימת בסביבה של V_0 פונקציה $I = I(V)$ כך ש-

$$F(I(V), V) = 0.$$

כעת נגזור את הזהות לפי V :

$$F_I(I(V), V) \cdot I'(V) + F_V(I(V), V) = 0.$$

כאן

$$F_V(I, V) = -1.$$

לכן

$$(R + 3\alpha I(V)^2)I'(V) - 1 = 0.$$

ומכאן

$$I'(V) = \frac{1}{R + 3\alpha I(V)^2}.$$

בפרט, בנקודת העבודה (I_0, V_0) ,

$$\boxed{\frac{dI}{dV}(V_0) = \frac{1}{R + 3\alpha I_0^2}}.$$

מבחינה הנדסית (במיוחד החשמליסטים שביננו), זהו השיפוע המקומי של עקומת הזרם-מתח. זהו הגודל שמשמש לניתוח רגישות ולליניאריזציה של המערכת ליד נקודת העבודה.

□

ניצחון

1.2 מישור משיק, משטחי רמה וגרדיאנט

הגדרה פורמלית

אם $z = f(x, y)$, אז המישור המשיק בנקודה $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ הוא

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

הגדרה פורמלית

מישור משיק למשטח סתום.
אם המשטח נתון על ידי $F(x, y, z) = 0$, ואם $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, אז $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ הוא וקטור נורמלי, והמישור המשיק הוא

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

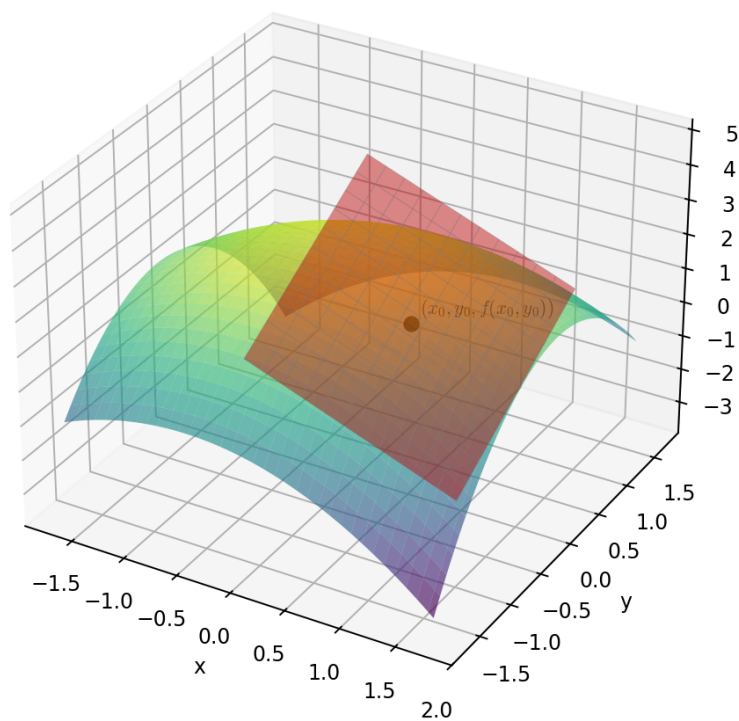
תזכורת (מההרצאה)

הגרדיאנט ניצב לקבוצת רמה. אם F דיפרנציאבילית ו- $\gamma(t)$ היא עקומה שמקיימת $F(\gamma(t)) = c$, אז

$$\nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

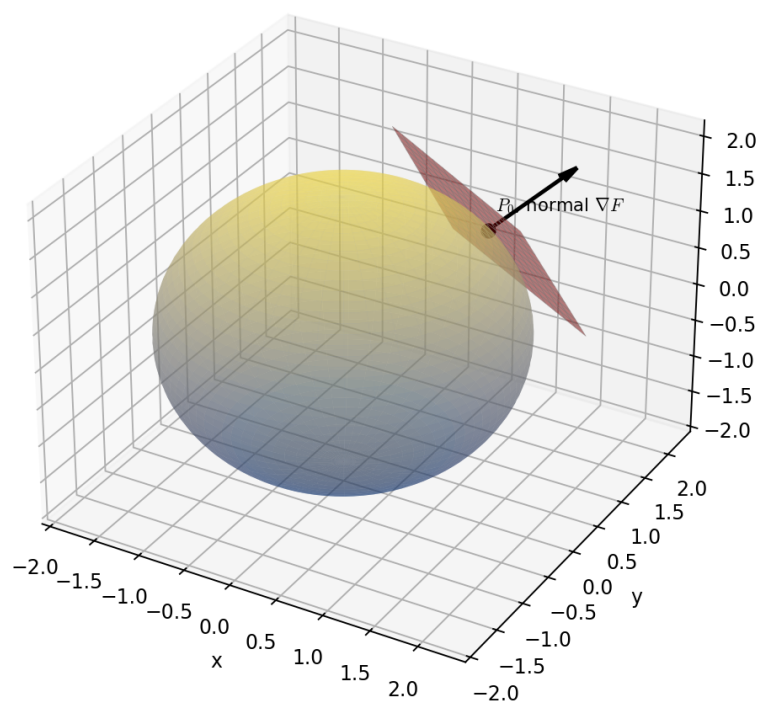
כאשר נתונה קבוצת רמה, מחשבים את ∇F בנקודה רגולרית ומשתמשים בו כווקטור נורמלי. במישור הוא ניצב למשיק לקו הרמה, ובמרחב הוא ניצב למישור המשיק למשטח הרמה.

Tangent plane to $z = f(x, y)$ at (x_0, y_0)

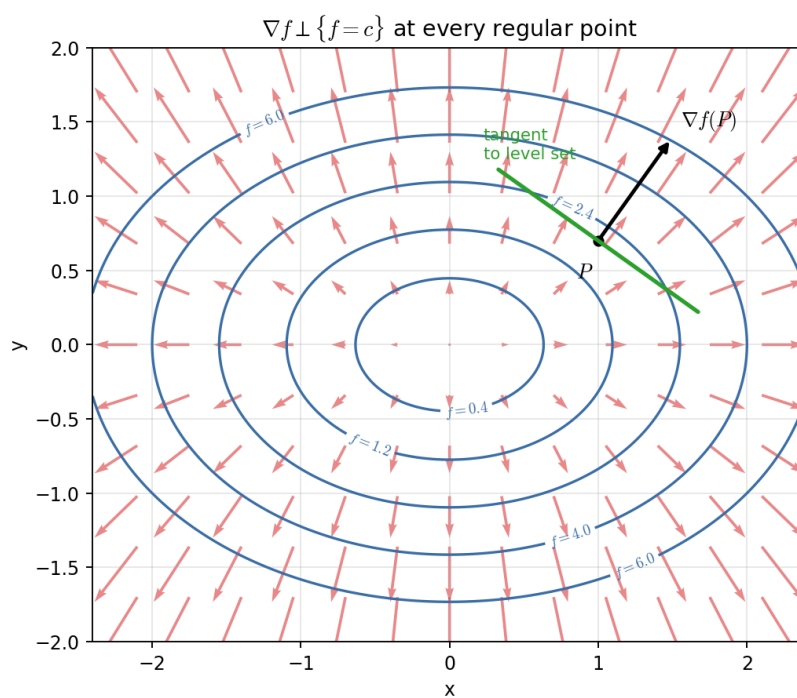


מישור משיק לגרף מפורש: זהו הקירוב הליניארי של המשטח ליד נקודת ההשקה.

Tangent plane to implicit surface $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

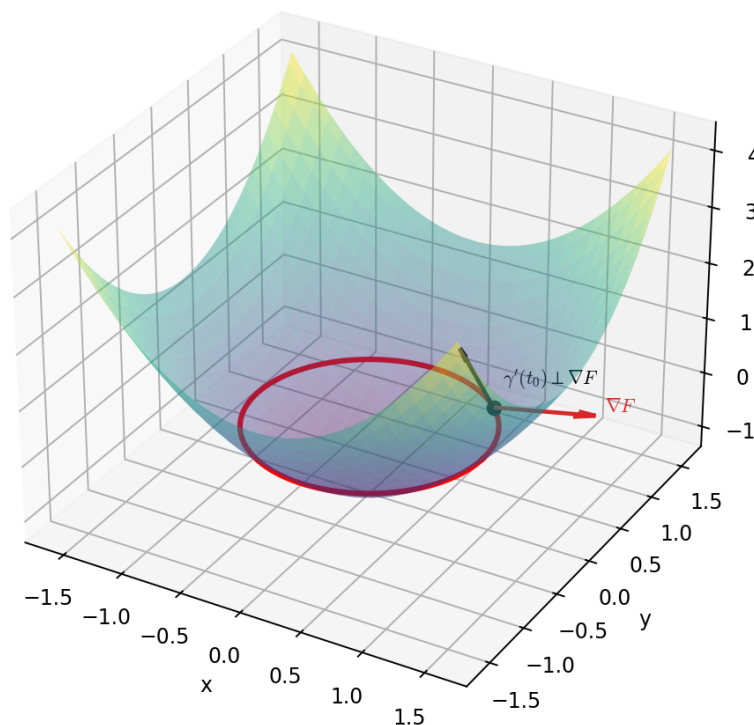


מישור משיק למשטח סתום: הגרדיאנט משמש כווקטור נורמלי למשטח.



במישור, הגרדיאנט ניצב לקו רמה בכל נקודה רגולרית.

Curve $\gamma(t)$ on $\{F=c\}$: $\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = \nabla F \cdot \gamma' = 0$



במרחב, אותה טענה נשאר נכונה: הגרדיאנט ניצב לכל וקטור משיק על משטח הרמה.

תרגיל 1.2.1.

נתון המשטח הסתום

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z + xyz - 2 = 0.$$

הוכיחו שבסביבה של הנקודה $(1, 1, 0)$ אפשר לכתוב $z = h(x, y)$. חשבו את $h_x(1, 1)$, את $h_y(1, 1)$, ואת משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה זו.

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו שילוב טבעי של משפט הפונקציה הסתומה עם מישור משיק. תחילה נבדוק את תנאי המשפט, אחר כך נחשב את הנגזרות של h , ולבסוף נכתוב את המישור המשיק בעזרת הגרדיאנט של F .

ראשית נוודא שהנקודה אכן נמצאת על המשטח:

$$F(1, 1, 0) = 1^2 + 1^2 + 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 = 0.$$

כעת נחשב את הנגזרות החלקיות של F :

$$F_x = 2x + yz, \quad F_y = 2y + xz, \quad F_z = 1 + xy.$$

בנקודה $(1, 1, 0)$ מתקבל

$$F_x(1, 1, 0) = 2, \quad F_y(1, 1, 0) = 2, \quad F_z(1, 1, 0) = 2.$$

בפרט,

$$F_z(1, 1, 0) \neq 0.$$

לכן משפט הפונקציה הסתומה חל, וקיימת פונקציה $z = h(x, y)$ בסביבה של $(1, 1)$ כך ש-

$$F(x, y, h(x, y)) = 0.$$

נשתמש בנוסחאות של המשפט:

$$h_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad h_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

לכן בנקודה $(1, 1)$ נקבל

$$h_x(1, 1) = -\frac{2}{2} = -1, \quad h_y(1, 1) = -\frac{2}{2} = -1.$$

כעת נכתוב את משוואת המישור המשיק. הווקטור הנורמלי הוא

$$\nabla F(1, 1, 0) = (2, 2, 2).$$

לכן המישור המשיק הוא

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 0) = 0.$$

נחלק ב-2, ונקבל

$$(x - 1) + (y - 1) + z = 0.$$

כלומר

$$x + y + z = 2.$$

בנוסף,

$$h_x(1, 1) = -1, \quad h_y(1, 1) = -1.$$

המשמעות הגיאומטרית היא שליד $(1, 1, 0)$ המשטח נראה כמו הגרף הליניארי $z \approx 2 - x - y$.

□

ניצחון

תרגיל 1.2.2.

נתונה הפונקציה

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + xy).$$

מצאו את משוואת המישור המשיק לגרף $z = f(x, y)$ בנקודה $(1, 1, f(1, 1))$, והשתמשו בו כדי לקרב את הערך של $f(1.1, 0.9)$.

פתרון.

עיקרון מנחה

כאן המשטח נתון בצורה מפורשת, ולכן המישור המשיק מתקבל ישירות מן הנגזרות החלקיות של f . לאחר מכן נשתמש במישור המשיק כקירוב ליניארי.

ראשית נחשב את ערך הפונקציה בנקודה:

$$f(1, 1) = \ln(1 + 1 + 1) = \ln 3.$$

כעת נחשב נגזרות חלקיות:

$$f_x(x, y) = \frac{2x + y}{1 + x^2 + xy}, \quad f_y(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + xy}.$$

נציב $(1, 1)$:

$$f_x(1, 1) = \frac{2 + 1}{3} = 1, \quad f_y(1, 1) = \frac{1}{3}.$$

לכן המישור המשיק הוא

$$z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1).$$

כלומר

$$z = \ln 3 + (x - 1) + \frac{1}{3}(y - 1).$$

זהו המישור המבוקש:

$$z = \ln 3 + (x - 1) + \frac{1}{3}(y - 1).$$

כעת נקרב את הערך ב- $(1.1, 0.9)$. כאן

$$\Delta x = 0.1, \quad \Delta y = -0.1.$$

לכן

$$f(1.1, 0.9) \approx \ln 3 + 1 \cdot 0.1 + \frac{1}{3}(-0.1).$$

נקבל

$$f(1.1, 0.9) \approx \ln 3 + 0.1 - \frac{0.1}{3} = \ln 3 + \frac{1}{15}.$$

כלומר

$$f(1.1, 0.9) \approx \ln 3 + 0.0667.$$

החשיבות של המישור המשיק היא בכך שהוא מחליף פונקציה לא ליניארית בקירוב ליניארי פשוט לחישוב.

□

ניצחון

1.3 קיצון מקומי, משפט פרמה ונקודת אוכף

הגדרה פורמלית

קיצון מקומי. תהי $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ותהי $p \in D$. אומרים ש- p היא נקודת מקסימום מקומי אם קיים $r > 0$ כך שלכל $q \in D \cap B(p, r)$ מתקיים

$$f(q) \leq f(p).$$

אומרים ש- p היא נקודת מינימום מקומי אם קיים $r > 0$ כך שלכל $q \in D \cap B(p, r)$ מתקיים

$$f(q) \geq f(p).$$

המילה "מקומי" חשובה: בודקים רק נקודות מספיק קרובות ל- p , ולא את כל התחום.

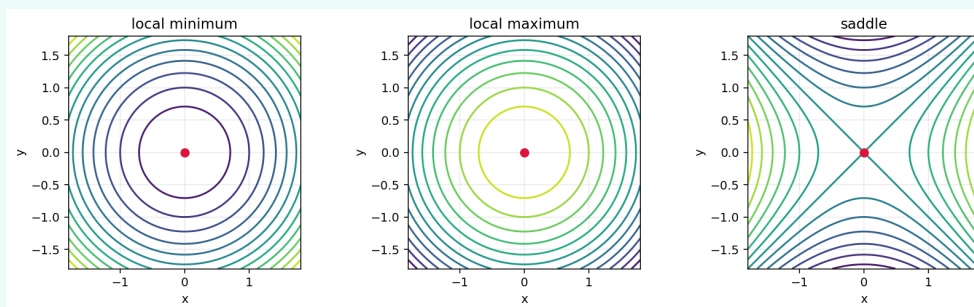
הגדרה פורמלית

נקודה קריטית ונקודת אוכף. אם p נקודת פנים של D , אז p נקראת נקודה קריטית של f אם f גזירה ב- p ו

$$\nabla f(p) = \vec{0}.$$

בקורס נהוג לכלול ברשימת המועמדים גם נקודות פנים שבהן f אינה גזירה, אם הן שייכות לתחום הבעיה.

נקודה קריטית p נקראת נקודת אוכף אם היא אינה מקסימום מקומי ואינה מינימום מקומי, ובכל סביבה קטנה של p קיימות נקודות שבהן ערך הפונקציה גדול מ- $f(p)$ וגם נקודות שבהן ערך הפונקציה קטן מ- $f(p)$.



עקומות רמה ליד מינימום, מקסימום ואוכף. באוכף יש כיוונים של עלייה וכיוונים של ירידה.

טענה 1.3.1.

משפט פרמה במרחב. תהי $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ותהי p נקודת פנים של D . אם f גזירה ב- p ויש ל- f קיצון מקומי ב- p , אז

$$\nabla f(p) = \vec{0}.$$

הערה קטנה ומועילה

תזכורת איך מוכיחים ואינטואיציה למה זה נכון...

נסמן את וקטורי הבסיס הסטנדרטיים ב- $e_1, \dots, e_n$. מאחר ש- p נקודת פנים, לכל i ולכל t קטן מספיק הנקודה $p + te_i$ נמצאת בתחום. נגדיר פונקציה חד משתנית

$$\varphi_i(t) = f(p + te_i).$$

אם ל- f יש קיצון מקומי ב- p , אז ל- φ_i יש קיצון מקומי ב- $t = 0$. לפי משפט פרמה החד משתני,

$$\varphi_i'(0) = 0.$$

אבל לפי כלל השרשרת

$$\varphi_i'(0) = D_{e_i} f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

לכן כל הנגזרות החלקיות מתאפסות, ומכאן $\nabla f(p) = \vec{0}$.

תזכורת (מההרצאה)

משפט פרמה נותן תנאי הכרחי בלבד. נקודה קריטית יכולה להיות מינימום, מקסימום, אוכל, או אף אחת מאלה. בתרגול זה ובכללי אנחנו משתמשים בעובדה זו רק כדי ליצור רשימת מועמדים, ולא כיחידת נושא עצמאית.

1.4 קיצון מוחלט על קומפקט

1.4.1 טענה

משפט הערך הקיצוני. תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית, כלומר סגורה וחסומה, ותהי $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. אז קיימות נקודות $p_{\min}, p_{\max} \in K$ כך ש

$$f(p_{\min}) \leq f(p) \leq f(p_{\max}) \quad \forall p \in K.$$

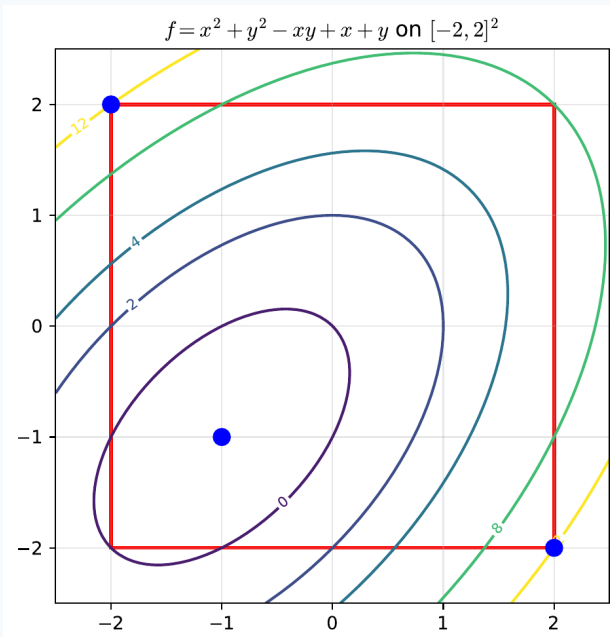
הוכחה.

זהו משפט ויירשטראס מן ההרצאה. קומפקטיות מונעת מן הנקודות "לברוח לאינסוף" או להתקרב לנקודת שפה שאינה בתחום, ורציפות מונעת קפיצה של הערכים.

הערה קטנה ומועילה

אלגוריתם מעשי על תחום קומפקטי $K \subseteq \mathbb{R}^2$.

1. מאשרים ש- K קומפקטית ו- f רציפה, ולכן קיצון מוחלט קיים.
2. בודקים מועמדים פנימיים. אם f גזירה ונקודת קיצון מוחלט נמצאת בפנים התחום, אז $\nabla f = \vec{0}$.
3. מנתחים כל חלק של השפה: פרמטריזציה, הצבה לפונקציה חד-משתנית, או כופלי לגרנז'.
4. לא שוכחים פינות, נקודות חיתוך, נקודות שבהן פרמטריזציה אינה חלקה, ונקודות שבהן תנאי לגרנז' אינו תקף.
5. משווים את ערכי f בכל המועמדים. רק ההשוואה הסופית קובעת את המקסימום והמינימום המוחלטים.



בתחום קומפקטי יש לבדוק גם את הפנים וגם את כל חלקי השפה.

תזכורת (מההרצאה)

נשתמש בתנאי $\nabla f = \vec{0}$ רק כתנאי הכרחי לנקודת קיצון פנימית של פונקציה גזירה.

1.5 אילוץ אחד וכופלי לגרנז'

טענה 1.5.1

כופלי לגרנז' עבור אילוץ אחד. נניח $f, g \in C^1$, ושנקודת p היא נקודת קיצון של f תחת האילוץ $g = c$. אם $\nabla g(p) \neq \vec{0}$, אז קיים מספר λ כך ש

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p), \quad g(p) = c.$$

הערה קטנה ומועילה

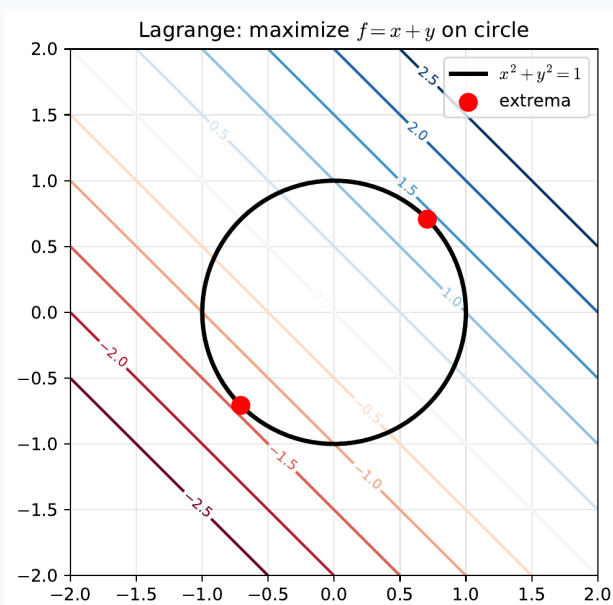
תזכורת איך מוכיחים ואינטואיציה למה זה נכון...
על עקומת האילוץ מותר לנוע רק בכיוונים משיקים ל- $g = c$. בנקודת קיצון, הנגזרת של f בכל כיוון משיק מתאפסת, ולכן ∇f ניצב לכל הכיוונים המשיקים. גם ∇g ניצב לעקומת הרמה $g = c$. שני

וקטורים הניצבים לאותה עקומה חלקה באותה נקודה חייבים להיות מקבילים.

הערה קטנה ומועילה

מתי השיטה תקפה ומה עדיין צריך לבדוק.

- תנאי הרגולריות הוא $\nabla g \neq \vec{0}$. אם הוא נכשל, בודקים את הנקודות הסינגולריות בנפרד.
- כופלי לגרנז' נותנים מועמדים, לא תשובה סופית.
- אם קבוצת האילוץ קומפקטית ו- f רציפה, קיצון מוחלט קיים, ואז השוואת כל המועמדים מסיימת את הבעיה.
- אם התחום אינו קומפקטי, יש להוכיח בנפרד שהמועמד שנמצא הוא באמת קיצון מוחלט.



בנקודת קיצון תחת אילוץ, עקומת הרמה של f משיקה לעקומת האילוץ.

כופלי לגרנז' עם שני אילוצים

הערה קטנה ומועילה

במרחב $\mathbb{R}^3$, שני אילוצים

$$g(x, y, z) = c, \quad h(x, y, z) = d$$

מגדירים בדרך כלל עקומה, שהיא חיתוך של שני משטחים. בנקודת קיצון תחת שני האילוצים מותר לנוע רק בכיוונים המשיקים לעקומת החיתוך. לכן הדיפרנציאל של f מתאפס על כל כיוון משיק לעקומה זו.

טענה 1.5.2

משפט לגרנז' לשני אילוצים. יהיו $f, g, h \in C^1$. נניח ש- p היא נקודת קיצון של f על הקבוצה

$$g = c, \quad h = d,$$

וש- $\nabla g(p), \nabla h(p)$ בלתי תלויים לינארית. אז קיימים $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ כך ש

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p) + \mu \nabla h(p), \quad g(p) = c, \quad h(p) = d.$$

הערה קטנה ומועילה

תנאי הרגולריות חשוב: שני הווקטורים $\nabla g(p), \nabla h(p)$ צריכים לפרוש את המישור הנורמלי לעקומת החיתוך. ב- $\mathbb{R}^3$ אפשר לבדוק זאת בעזרת

$$\nabla g(p) \times \nabla h(p) \neq \vec{0}.$$

אם תנאי זה נכשל, נקודת האילוץ היא נקודה סינגולרית של התיאור, ושיטת לגרנז' אינה מבטיחה שנקבל אותה. נקודות כאלה חייבות להיבדק בנפרד.

הערה קטנה ומועילה

אלגוריתם לשני אילוצים.

1. בודקים קומפקטיות, או מסבירים בנפרד מדוע קיצון קיים.
2. כותבים את המשוואות $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$.
3. מוסיפים את שתי משוואות האילוץ $g = c, h = d$.
4. פותרים את המערכת עבור x, y, z, λ, μ .
5. בודקים בנפרד נקודות שבהן $\nabla g \times \nabla h = \vec{0}$.

6. משווים את ערכי f בכל המועמדים. לגרנז' נותן מועמדים בלבד.

הערה קטנה ומועילה

איך ניגשים לשאלת קיצון?

1. בלי אילוץ על תחום קומפקטי: מוצאים נקודות פנים קריטיות, מנתחים את השפה, בודקים פינות ומשווים ערכים.
2. שפה של תחום דו ממדי: מפרקים את השפה לעקומות חלקות, מציבים פרמטריזציה או משתמשים בגרנז', ובודקים נקודות חיבור.
3. אילוץ אחד: פותרים $\nabla f = \lambda \nabla g$, מוסיפים $g = c$, ובודקים נקודות לא רגולריות שבהן $\nabla g = \vec{0}$.
4. שני אילוצים: פותרים $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, מוסיפים את שני האילוצים, ובודקים $\nabla g \times \nabla h = \vec{0}$.
5. תחום לא קומפקטי: מחפשים קודם חסם שמאפשר לצמצם לתת תחום קומפקטי, ואז מוכיחים שאף נקודה מחוץ לקבוצה קומפקטית לא משפרת את הערך.

1.6 תרגילים

תרגיל 1.6.1

לוח משולש דק נתון על ידי

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}.$$

טמפרטורת הלוח במעלות היא

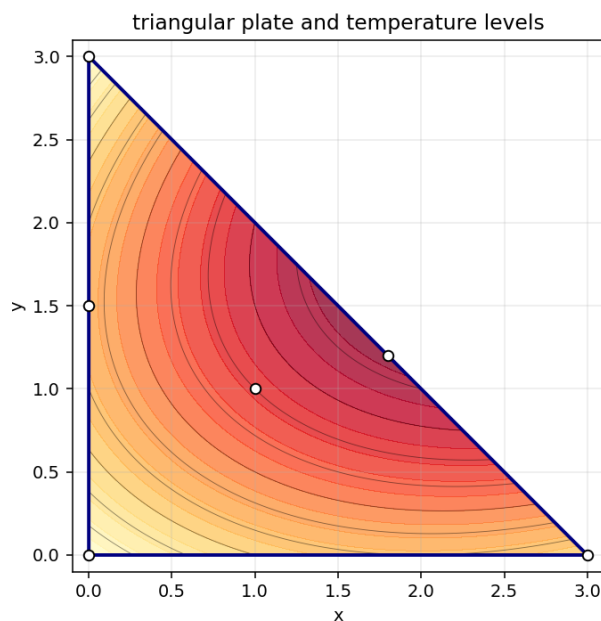
$$T(x, y) = 30 + 4x + 6y - x^2 - 2y^2 + xy.$$

מצאו את הטמפרטורה המקסימלית והמינימלית על הלוח.

פתרון.

עיקרון מנחה

התחום הוא משולש סגור וחסום, ולכן קומפקטי. הפונקציה רציפה, ולכן קיצון מוחלט קיים. הגרדיאנט נותן מועמדים פנימיים, אבל כאן המועמד הפנימי יוצא מחוץ למשולש. לכן עיקר העבודה הוא ניתוח מדויק של שלוש הצלעות והשוואת הערכים.



תחום משולש, עקומות רמה של הטמפרטורה, ומועמדים מן הפנים והשפה.

קיום. D סגור וחסום, ולכן קומפקטי. T פולינום, ולכן רציפה. לפי משפט הערך הקיצוני קיימים מקסימום ומינימום מוחלטים. **מועמד פנימי.**

$$T_x = 4 - 2x + y, \quad T_y = 6 - 4y + x.$$

נפתור

$$4 - 2x + y = 0, \quad 6 - 4y + x = 0.$$

מן הראשונה $y = 2x - 4$, ומן השנייה $x = 4y - 6$. לכן

$$y = 2(4y - 6) - 4 = 8y - 16,$$

ומכאן $x = 22/7$, $y = 16/7$. אבל

$$x + y = \frac{38}{7} > 3,$$

ולכן נקודה זו אינה בתחום. אין מועמד פנימי.

צלע $x = 0$

$$T(0, y) = 30 + 6y - 2y^2, \quad 0 \leq y \leq 3.$$

הנגזרת היא $6 - 4y$, ולכן המועמד הוא $y = 3/2$. הערכים:

$$T(0, 0) = 30, \quad T(0, 3) = 30, \quad T\left(0, \frac{3}{2}\right) = \frac{69}{2}.$$

צלע $y = 0$

$$T(x, 0) = 30 + 4x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

הנגזרת היא $4 - 2x$, ולכן $x = 2$. הערכים:

$$T(0, 0) = 30, \quad T(3, 0) = 33, \quad T(2, 0) = 34.$$

צלע $x + y = 3$. נציב $y = 3 - x$, $0 \leq x \leq 3$:

$$T(x, 3 - x) = 30 + 13x - 4x^2.$$

הנגזרת היא $13 - 8x$, ולכן $x = 13/8$, $y = 11/8$. הערכים בקצות הצלע כבר חושבו:

$$T(0, 3) = 30, \quad T(3, 0) = 33.$$

ובמועמד:

$$T\left(\frac{13}{8}, \frac{11}{8}\right) = 30 + \frac{169}{8} - \frac{169}{16} = \frac{649}{16}.$$

השוואה. הערך הקטן ביותר הוא 30, והוא מתקבל למשל ב- $(0, 0)$ וב- $(0, 3)$. הערך הגדול ביותר הוא

$$T_{\max} = \frac{649}{16} \text{ ב-} \left(\frac{13}{8}, \frac{11}{8}\right), \quad T_{\min} = 30.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.6.2

אנטנה מישורית בגלקסיית החצילים ניתנת לכיוון באמצעות שני פרמטרים x, y . פונקציית עוצמת הרוח החצילי (רוח שנובע מגשם חצילים תמידי בגלקסית החצילים) היא

$$G(x, y) = x + 2y,$$

ומגבלת האנרגיה של המערכת היא

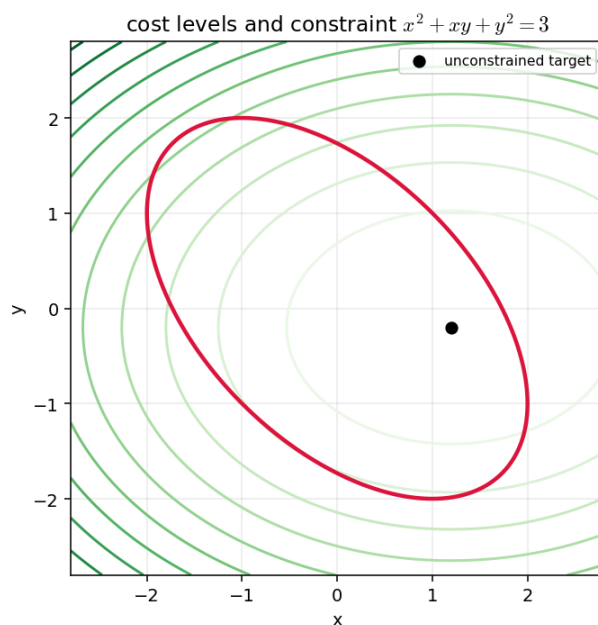
$$x^2 + xy + y^2 = 3.$$

מצאו את הכיוון שממקסם ואת הכיוון שממזער את עוצמת הרוח.

פתרון.

עיקרון מנחה

האילוץ אינו מעגל אלא אליפסה מסובבת. מבחינה גיאומטרית מחפשים את ישרי הרמה של G שנוגעים בעקומת האנרגיה. כופלי לגרנז' נותנים בדיוק את תנאי ההשקה הזה.



עקומת אנרגיה מסובבת וקווי רמה של פונקציית רווח.

קיום. הקבוצה $x^2 + xy + y^2 = 3$ סגורה וחסומה, מפני ש

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

לכן היא קומפקטית. G רציפה, ולכן קיימים קיצונים מוחלטים. **משוואות לגרנז'י.** נסמן

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

אז

$$\nabla G = (1, 2), \quad \nabla g = (2x + y, x + 2y).$$

משוואות לגרנז'י הן

$$(1, 2) = \lambda(2x + y, x + 2y).$$

אם $\lambda \neq 0$, אז

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ההופכית של המטריצה היא

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

כלומר $x = 0, y = 1/\lambda$. נציב באילוץ:

$$y^2 = 3,$$

ולכן $y = \pm\sqrt{3}$.
השוואת ערכים.

$$G(0, \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}, \quad G(0, -\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}.$$

$$G_{\max} = 2\sqrt{3} \text{ ב- } (0, \sqrt{3}), \quad G_{\min} = -2\sqrt{3} \text{ ב- } (0, -\sqrt{3}).$$

בדיקת המועמדים מספיקה מפני שהאילוץ קומפקטי ורגולרי, שכן $\nabla g = \vec{0}$ רק בראשית, והראשית אינה על $g = 3$.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.3

מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של

$$f(x, y) = x - y$$

על העקומה הפרבולית

$$y = x^2, \quad -1 \leq x \leq 2.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו אילוץ שאינו מעגל או אליפסה. במקרה כזה הדרך הטבעית היא להשתמש בפרמטריזציה של העקומה. הקטע הפרבולי קומפקטי, ולכן אחרי שמצאנו מועמדים חד משתניים נשווה גם את קצות הקטע.

הפרמטריזציה היא

$$\vec{r}(t) = (t, t^2), \quad -1 \leq t \leq 2.$$

על העקומה

$$h(t) = f(t, t^2) = t - t^2.$$

נגזור:

$$h'(t) = 1 - 2t.$$

המועמד הפנימי הוא $t = 1/2$. כעת משווים עם קצות הקטע:

$$h(-1) = -1 - 1 = -2,$$

$$h(2) = 2 - 4 = -2,$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$f_{\max} = \frac{1}{4} \text{ ב-} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad f_{\min} = -2 \text{ ב-} (-1, 1) \text{ וב-} (2, 4).$$

שימו לב שהמינימום מתקבל בשתי נקודות שפה שונות. זו סיבה נוספת לכך שבבעיית קיצון מוחלט אין להסתפק במועמד הפנימי.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.4.

מצאו את התיבה בעלת הנפח הגדול ביותר החסומה בתוך האליפסואיד

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

כאשר צלעות התיבה מקבילות לצירים ומרכז בראשית.

פתרון.

עיקרון מנחה

אם קודקוד אחד של התיבה הוא (x, y, z) ברביע הראשון, אז הנפח הוא $8xyz$. האילוץ הוא פני האליפסואיד. נוח למקסם xyz , או באופן שקול את $\ln(xyz)$, בתחום $x, y, z > 0$.

נמקסם

$$F(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z$$

תחת האילוץ

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

משוואות לגרנד':

$$\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) = \lambda \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right).$$

לכן

$$x^2 = \frac{a^2}{2\lambda}, \quad y^2 = \frac{b^2}{2\lambda}, \quad z^2 = \frac{c^2}{2\lambda}.$$

נציב באילוץ:

$$\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} = 1 \implies \lambda = \frac{3}{2}.$$

לכן

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

הנפח המקסימלי:

$$V_{\max} = 8xyz = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

$$\boxed{\text{צלעות התיבה הן } \frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.6.5.

נקודה קרובה ביותר לגרף. מצאו את הנקודה על הפרבולואיד

$$S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2\}$$

הקרובה ביותר לנקודה

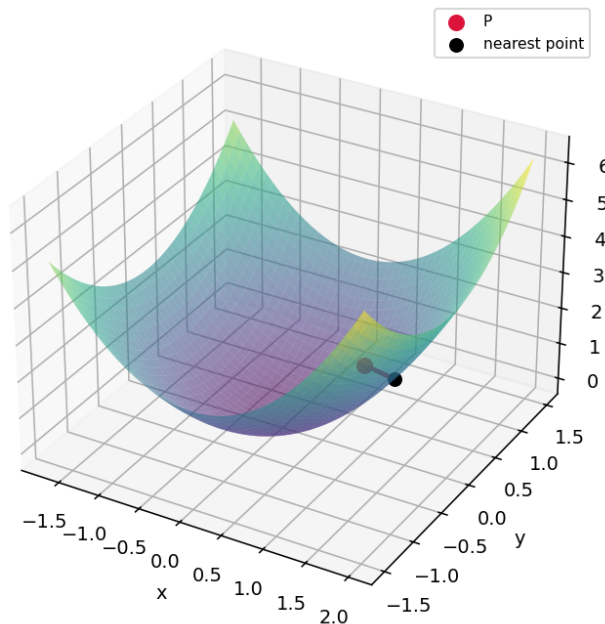
$$P = (1, 0, 2).$$

פתרון.

עיקרון מנחה

מרחק עצמו כולל שורש, אבל ריבוע המרחק מקבל מינימום באותן נקודות. מאחר שהגרף אינו קומפקטי, צריך לשים לב שהפונקציה שאנו ממזערים גדלה לאינסוף כאשר $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$. הסימטריה ביחס למישור $y = 0$ כבר מרמזת שהנקודה הקרובה תהיה על החתך $y = 0$, אבל נוכיח זאת מתוך המשוואות.

closest point on $z = x^2 + y^2$ to $P = (1, 0, 2)$



הפרבולואיד, הנקודה החיצונית, והקטע המינימלי.

נקודה כללית על S היא

$$Q(x, y) = (x, y, x^2 + y^2).$$

נמזער את ריבוע המרחק:

$$D(x, y) = \|Q(x, y) - P\|^2 = (x - 1)^2 + y^2 + (x^2 + y^2 - 2)^2.$$

כאשר $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, האיבר $(x^2 + y^2 - 2)^2$ שואף לאינסוף, ולכן $D \rightarrow \infty$. מכאן שמינימום מוחלט קיים. לעומת זאת אין מקסימום, כי D אינה חסומה מלמעלה. נסמן $s = x^2 + y^2$. נגזור:

$$D_x = 2(x - 1) + 4x(s - 2),$$

$$D_y = 2y + 4y(s - 2) = 2y(2s - 3).$$

נפתור $D_x = D_y = 0$.
מן המשוואה $D_y = 0$ נקבל

$$y = 0 \quad \text{או} \quad s = \frac{3}{2}.$$

אם $s = 3/2$, אז

$$D_x = 2(x - 1) + 4x\left(-\frac{1}{2}\right) = 2x - 2 - 2x = -2,$$

סתירה. לכן בהכרח $y = 0$.

כאשר $y = 0$, מתקבל

$$D_x = 2(x - 1) + 4x(x^2 - 2) = 4x^3 - 6x - 2.$$

לכן

$$2x^3 - 3x - 1 = 0.$$

פירוק נותן

$$2x^3 - 3x - 1 = (x + 1)(2x^2 - 2x - 1),$$

ולכן המועמדים הם

$$x = -1, \quad x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

נחשב את ערכי D :

$$D(-1, 0) = 5,$$

$$D\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, 0\right) = \frac{11 - 6\sqrt{3}}{4},$$

$$D\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, 0\right) = \frac{11 + 6\sqrt{3}}{4}.$$

הערך הקטן ביותר הוא $(11 - 6\sqrt{3})/4$. לכן הנקודה הקרובה ביותר היא

$$Q_{\min} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, 0, \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, 0, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

המרחק המינימלי עצמו הוא

$$d_{\min} = \frac{1}{2} \sqrt{11 - 6\sqrt{3}}.$$

□

ניצחון

דוגמא למלא נקודות קריטיות...

תרגיל 1.6.6.

נתונה הפונקציה

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2.$$

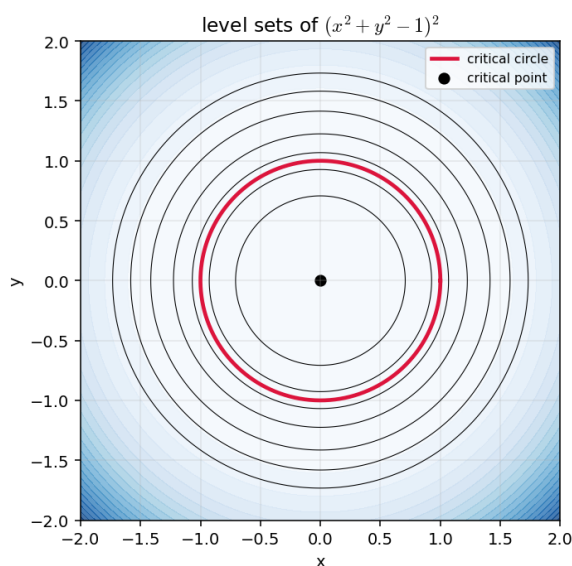
מצאו את כל הנקודות הקריטיות, וקבעו אילו מהן הן נקודות קיצון מקומי או מוחלט. הסבירו את

התמונה הגיאומטרית מתוך עקומות הרמה ומתוך ערכי הפונקציה.

פתרון.

עיקרון מנחה

הפונקציה תלויה רק במרחק מן הראשית. לכן עקומות הרמה הן מעגלים, ולא נקודות בודדות. כאשר המרחק מן הראשית הוא 1, הפונקציה מתאפסת על מעגל שלם, ולכן טבעי לצפות לאינסוף נקודות מינימום.



כל מעגל היחידה הוא קבוצת מינימום. הראשית היא נקודה קריטית נוספת.

נחשב גרדיאנט:

$$f_x = 4x(x^2 + y^2 - 1), \quad f_y = 4y(x^2 + y^2 - 1).$$

לכן $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ אם ורק אם

$$x(x^2 + y^2 - 1) = 0, \quad y(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

יש שתי אפשרויות:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

או

$$x = 0, \quad y = 0.$$

כלומר קבוצת הנקודות הקריטיות היא

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}.$$

כיוון ש- $f \geq 0$ בכל נקודה, ועל מעגל היחידה $f = 0$, כל נקודה על מעגל היחידה היא מינימום מוחלט וגם מינימום מקומי. בנקודת הראשית:

$$f(0, 0) = 1.$$

אם $0 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$, אז

$$f(x, y) = (r^2 - 1)^2 < 1.$$

לכן בסביבה קטנה של הראשית כל הערכים, מלבד הראשית עצמה, קטנים מ-1. הראשית היא מקסימום מקומי. היא אינה מקסימום מוחלט, כי כאשר $r \rightarrow \infty$,

$$(r^2 - 1)^2 \rightarrow \infty.$$

אין כאן נקודת אוסף: על מעגל היחידה יש מינימום, ובראשית יש מקסימום מקומי.

□

ניצחון

תרגיל על תחום שאינו קומפקטי.

תרגיל 1.6.7.

מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של

$$f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$$

על כל $\mathbb{R}^2$. כתבו במפורש כיצד מצמצמים את הבעיה לתחום קומפקטי ומדוע המסקנה גלובלית.

פתרון.

עיקרון מנחה

התחום כולו אינו קומפקטי, ולכן משפט הערך הקיצוני אינו חל ישירות. אבל הפונקציה דועכת לאפס כאשר $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. נמצא דיסק סגור גדול שבתוכו חייבים להופיע המועמדים הרציניים, נפתור עליו בעיית קיצון קומפקטית, ואז נוכיח שהערכים מחוץ לדיסק אינם מתחרים בהם.

מדוע צריך צמצום לקבוצה קומפקטית. התחום הוא כל $\mathbb{R}^2$, והוא אינו קומפקטי מפני שאינו חסום. לכן אי אפשר להתחיל מן המשפט על קיצון בקבוצה קומפקטית. במקום זאת נבחר דיסק סגור K , נוכיח שמחוץ לו הערכים קטנים בערך מוחלט מן הערכים שנמצא בפנים, ואז נסיק מסקנה גלובלית. נסמן $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. לכל נקודה מתקיים

$$|f(x, y)| = |x|e^{-r^2} \leq re^{-r^2}.$$

עבור $r \geq 2$, הפונקציה re^{-r^2} יורדת, ולכן

$$|f(x, y)| \leq 2e^{-4}.$$

מצד שני,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}.$$

ברור ש

$$2e^{-4} < \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}.$$

לכן מחוץ לדיסק $K = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$ אין נקודה שיכולה לתת מקסימום גדול יותר מן הערך החיובי שמצאנו, ואין נקודה שיכולה לתת מינימום קטן יותר מן הערך השלילי שמצאנו. כעת פותרים על K , שהוא קומפקטי. בפנים:

$$f_x = e^{-r^2}(1 - 2x^2), \quad f_y = -2xye^{-r^2}.$$

מן המשוואה $f_y = 0$ נקבל $x = 0$ או $y = 0$. אם $x = 0$, אז $f_x = e^{-y^2} \neq 0$, ולכן אין פתרון. לכן $y = 0$, ומן $f_x = 0$:

$$1 - 2x^2 = 0 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

על שפת הדיסק $r = 2$:

$$f(x, y) = xe^{-4}, \quad -2 \leq x \leq 2,$$

ולכן הערכים על השפה נמצאים בין $-2e^{-4}$ ל- $2e^{-4}$. השוואת הערכים נותנת

$$f_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} \text{ ב- } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$f_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} \text{ ב- } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

ההוכחה הגלובלית הושלמה מפני שהראינו מראש שמחוץ לדיסק הקומפקטי הערך המוחלט קטן מערכי הקיצון שבתוכו.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.8.

מודל תרמודינמי פשוט נותן אנטרופיה

$$S(U, V) = a \ln U + b \ln V, \quad a, b > 0,$$

כאשר $U > 0$ היא אנרגיה פנימית ו- $V > 0$ הוא נפח. תחת האילוץ

$$U + cV = E, \quad c, E > 0,$$

מצאו את U, V שממקסמים את האנטרופיה.

פתרון.

עיקרון מנחה

האילוץ אומר שיש משאב כולל קבוע, ואנחנו מחלקים אותו בין אנרגיה לבין נפח. האנטרופיה קעורה במשתנים החיוביים, אבל אין צורך לפתח זאת כאן: כופלי לגרנז' נותנים מועמד יחיד, ושפת התחום החיובי גורמת לאנטרופיה לשאוף ל- $-\infty$, ולכן המועמד הוא המקסימום.

נגדיר

$$g(U, V) = U + cV.$$

משוואות לגרנז':

$$\left(\frac{a}{U}, \frac{b}{V} \right) = \lambda(1, c).$$

לכן

$$U = \frac{a}{\lambda}, \quad V = \frac{b}{c\lambda}.$$

נציב באילוץ:

$$\frac{a}{\lambda} + c \cdot \frac{b}{c\lambda} = E \implies \frac{a+b}{\lambda} = E \implies \lambda = \frac{a+b}{E}.$$

מכאן

$$U = \frac{aE}{a+b}, \quad V = \frac{bE}{c(a+b)}.$$

כאשר $U \rightarrow 0^+$ או $V \rightarrow 0^+$, האנטרופיה $S \rightarrow -\infty$, ולכן נקודת הפנים היחידה שמצאנו היא המקסימום המוחלט תחת האילוץ.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.9.

תהי

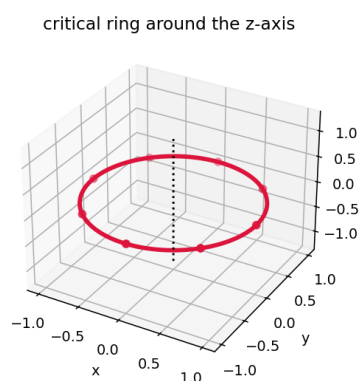
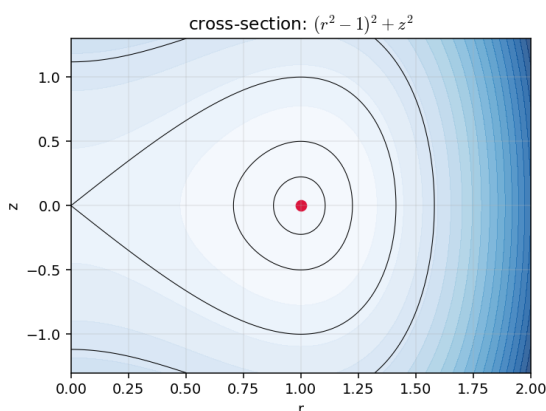
$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + z^2.$$

מצאו את כל הנקודות הקריטיות.

פתרון.

עיקרון מנחה

הפונקציה תלויה ב- x, y רק דרך המרחק מן ציר z . לכן אין לצפות לנקודות מינימום יחידה: אם נקודה אחת במעגל מסוים היא מינימום, כל הסיבובים שלה סביב הציר נותנים אותו ערך. הקושי הוא להבחין בין טבעת של מינימום מוחלט לבין נקודה קריטית אחרת שנראית סימטרית, אבל אינה קיצון.



סימטריה סיבובית: החתך במישור (r, z) מציג את הערכים, ובמרחב מתקבלת טבעת של נקודות מינימום.

נסמן

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

אז

$$f = (r^2 - 1)^2 + z^2,$$

ולכן

$$f_x = 4x(r^2 - 1), \quad f_y = 4y(r^2 - 1), \quad f_z = 2z.$$

נקודה קריטית חייבת לקיים $z = 0$, וגם

$$x(r^2 - 1) = 0, \quad y(r^2 - 1) = 0.$$

אם $r^2 = 1$, נקבל את כל המעגל

$$C = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

אם $r^2 \neq 1$, נקבל $x = y = 0$, ולכן נקודה קריטית נוספת היא

$$(0, 0, 0).$$

נסמן

$$A = x^2 + y^2 - 1.$$

אז

$$f(x, y, z) = A^2 + z^2 \geq 0,$$

ובכל נקודה של C מתקיים $f = 0$. לכן כל נקודה על C היא מינימום מוחלט. בפרט זו אינה נקודת מינימום מבודדת, אלא עקומה שלמה של מינימום. הראשית מתקיים

$$f(0, 0, 0) = 1.$$

מצד אחד, לאורך ציר z :

$$f(0, 0, z) = 1 + z^2 > 1$$

לכל $z \neq 0$. מצד שני, במישור $z = 0$, אם $0 < r < 1$, אז

$$f(r, 0, 0) = (r^2 - 1)^2 < 1.$$

כלומר, בכל סביבה של הראשית יש ערכים גדולים מ-1 וגם ערכים קטנים מ-1. לכן הראשית אינה מקסימום מקומי ואינה מינימום מקומי, אלא נקודת אוכף.

$$\text{Crit}(f) = C \cup \{(0, 0, 0)\}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.6.10.

במערכת בקרה של ניסוי פיזיקלי-ביורפואתי-קוונטי-אופטי-מכני-חשמלי יש שני פרמטרים a, b . מודל כיול לינארי מבקש להתקרב לערכי היעד $(2, 1)$, ולכן שגיאת הכיול היא

$$E(a, b) = (a - 2)^2 + (b - 1)^2.$$

בגלל מגבלת אנרגיה של הבקר חייבים לקיים

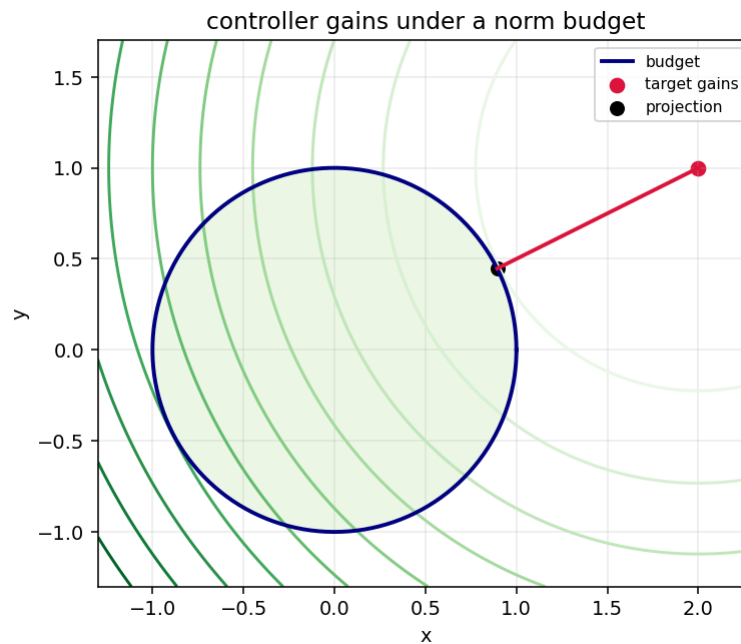
$$a^2 + b^2 \leq 1.$$

מצאו את הפרמטרים שממזערים את E , והסבירו את המשמעות הגאומטרית.

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו ניסוח אלגוריתמי של הטלה נקודת יעד על תחום אפשרי. נקודת היעד $(2, 1)$ אינה מותרת, ולכן המינימום לא יופיע בפנים הדיסק אלא על שפת מגבלת האנרגיה. כופלי לגרנז' נותנים את הנקודות על השפה שבהן מעגלי השגיאה משיקים לאילוף.



כיוול תחת תקציב: בוחרים את הנקודה בדיסק היחידה הקרובה ביותר ליעד.

התחום

$$D = \{(a, b) : a^2 + b^2 \leq 1\}$$

קומפקטי, ו- E רציפה, לכן קיים מינימום מוחלט. בלי האילוץ המינימום הוא $(2, 1)$, אבל

$$2^2 + 1^2 = 5 > 1,$$

ולכן נקודה זו אינה בתחום. בפנים הדיסק אין נקודת מינימום חדשה, כי

$$\nabla E = (2(a - 2), 2(b - 1))$$

מתאפס רק ב- $(2, 1)$. לכן המינימום נמצא על השפה $a^2 + b^2 = 1$ נגדיר

$$g(a, b) = a^2 + b^2.$$

משוואות לגרנ' הן

$$(2(a - 2), 2(b - 1)) = \lambda(2a, 2b).$$

כלומר

$$a - 2 = \lambda a, \quad b - 1 = \lambda b.$$

מכאן, עבור $\lambda \neq 1$,

$$a = \frac{2}{1 - \lambda}, \quad b = \frac{1}{1 - \lambda},$$

ולכן יחס הקואורדינטות הוא

$$a : b = 2 : 1.$$

על מעגל היחידה נקבל את שני המועמדים

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

נחשב את השגיאות:

$$E\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = (\sqrt{5} - 1)^2,$$

כי זו בדיוק שגיאת המרחק מן $(2, 1)$ לאורך הכיוון $(2, 1)$. עבור הנקודה הנגדית,

$$E\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = (\sqrt{5} + 1)^2.$$

לכן

$$(a, b) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

הוא פתרון הכיול המיטבי. מבחינה גאומטרית זו ההקרנה הרדיאלית של היעד על מעגל האנרגיה המותר.

□

ניצחון

תרגיל 1.6.11.

חוט דק מתקבל כחיתוך של הספירה

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

עם המישור

$$x + y + z = a,$$

כאשר $|a| < \sqrt{3}R$. הטמפרטורה בנקודה (x, y, z) היא

$$T(x, y, z) = x + 2y + 3z.$$

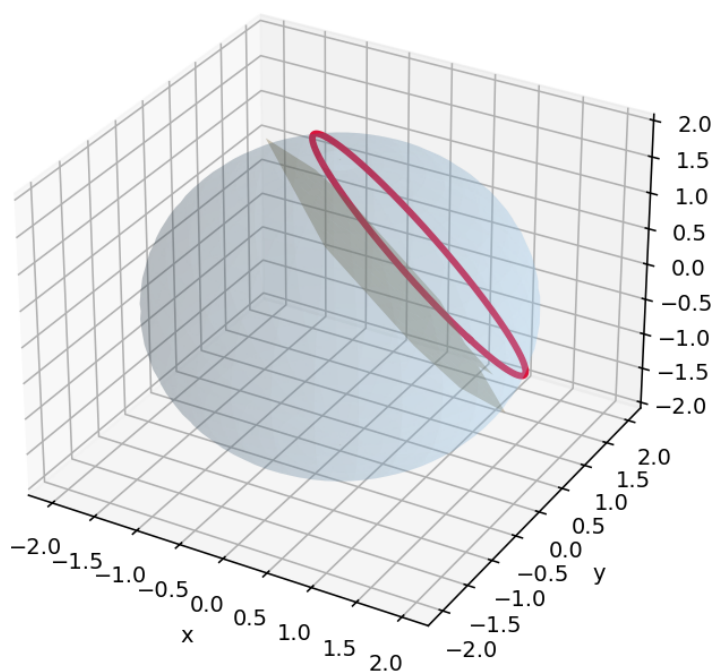
מצאו את הטמפרטורה המקסימלית והמינימלית על החוט.

פתרון.

עיקרון מנחה

חיתוך ספירה ומישור הוא מעגל, כל עוד המישור חותך את הספירה ולא רק משיק לה. לכן זהו תחום קומפקטי, והטמפרטורה הרציפה מקבלת מקסימום ומינימום. שני האילוצים מגדירים עקומה, ולכן משתמשים בכופלי לגרנז' עם שני אילוצים, או באופן שקול מפרקים את וקטור הטמפרטורה לרכיב בכיוון המישור ולרכיב ניצב לו.

sphere, plane and constraint curve



חיתוך ספירה ומישור יוצר עקומת אילוך מעגלית.

נסמן

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad h(x, y, z) = x + y + z.$$

קבוצת האילוך היא סגורה וחסומה, ולכן קומפקטית. הפונקציה T רציפה, ולכן לפי משפט וירשטראס קיימים קיצון מוחלטים. תנאי הרגולריות:

$$\nabla g = (2x, 2y, 2z), \quad \nabla h = (1, 1, 1).$$

אם ∇h -ו- ∇g תלויים לינארית, אז $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$. מן האילוך $x + y + z = a$ נקבל $t = a/3$, ולכן

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3t^2 = \frac{a^2}{3}.$$

זה שווה ל- R^2 רק אם $|a| = \sqrt{3}R$. לפי ההנחה $|a| < \sqrt{3}R$, ולכן על כל החוט

$$\nabla g \times \nabla h \neq \vec{0}.$$

אין נקודות סינגולריות שצריך להוסיף.
משוואות לגרנ' הן

$$\nabla T = \lambda \nabla g + \mu \nabla h.$$

כלומר

$$(1, 2, 3) = \lambda(2x, 2y, 2z) + \mu(1, 1, 1),$$

יחד עם

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x + y + z = a.$$

כדי לפתור נקי, נשתמש בפירוק גאומטרי שנובע מאותן משוואות. נסמן

$$\vec{w} = (1, 2, 3), \quad \vec{n} = (1, 1, 1).$$

מרכז המעגל, כלומר ההיטל של הראשית על המישור $x + y + z = a$, הוא

$$\vec{q} = \frac{a}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{a}{3}(1, 1, 1).$$

רדיוס המעגל הוא

$$\rho = \sqrt{R^2 - \|\vec{q}\|^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

כל נקודה על החוט נכתבת

$$\vec{p} = \vec{q} + \vec{s}, \quad \vec{s} \cdot \vec{n} = 0, \quad \|\vec{s}\| = \rho.$$

כעת

$$T(\vec{p}) = \vec{w} \cdot \vec{p} = \vec{w} \cdot \vec{q} + \vec{w} \cdot \vec{s}.$$

הרכיב של $\vec{w}$ המשפיע על $\vec{s}$ הוא ההיטל של $\vec{w}$ על המישור $\vec{n}^\perp$:

$$\vec{w}_\parallel = \vec{w} - \frac{\vec{w} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (1, 2, 3) - 2(1, 1, 1) = (-1, 0, 1).$$

לכן

$$\vec{w} \cdot \vec{q} = (1, 2, 3) \cdot \frac{a}{3}(1, 1, 1) = 2a,$$

ו

$$\vec{w} \cdot \vec{s} = \vec{w}_\parallel \cdot \vec{s}.$$

על המעגל $\|\vec{s}\| = \rho$, ולכן לפי קושי שוורץ

$$-\rho \|\vec{w}_\parallel\| \leq \vec{w}_\parallel \cdot \vec{s} \leq \rho \|\vec{w}_\parallel\|.$$

מאחר ש

$$\|\vec{w}_\parallel\| = \sqrt{2},$$

נקבל

$$T_{\max} = 2a + \sqrt{2}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}, \quad T_{\min} = 2a - \sqrt{2}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

נקודות הקיצון מתקבלות כאשר $\vec{s}$ מקביל או מנוגד ל- $\vec{w}_{\parallel}$:

$$\vec{p}_{\max} = \frac{a}{3}(1, 1, 1) + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}},$$

$$\vec{p}_{\min} = \frac{a}{3}(1, 1, 1) - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}.$$

□

ניצחון

על ידי חן גדי