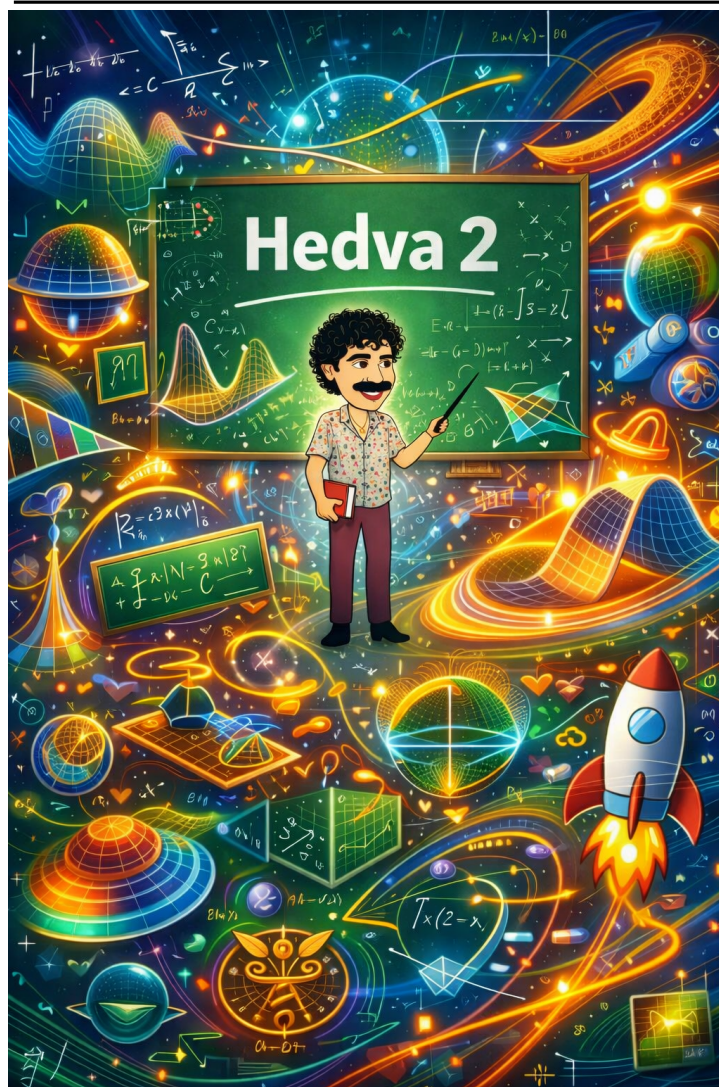


חדו"א 2 להנדסות

סיכומים ותרגולים



נערך ונכתב על ידי חן גדי ליצירת קשר במייל

ייתכנו טעויות, אי-דיוקים, השמטות או ניסוחים לא מושלמים.
בכל הערה, תיקון או הצעה לשיפור אפשר לפנות לקישור המייל שלמעלה.
החומר המצויב הוא החומר המועבר בהרצאות ובהודעות הרשמיות של הקורס.

תודה גדולה לכל האנשים שתרמו לי בכל דרך, בהערות, בתיקונים, בהסברים, ברעיונות, בתמיכה לאורך הדרך, וגם לכל מי שלימד אותי, המליץ לי, שלח תבניות, שיתף תרגילים או סייע בכל צורה אחרת.

נוצר על ידי חוג גדי

תוכן העניינים

2	1 תרגול 9: אינטגרלים כפולים, פוביני, החלפת סדר והחלפת משתנים
2	1.1 אינטגרל כפול ופוביני
18	1.2 החלפת משתנים, יעקוביאן ופולריות

תרגול 9: אינטגרלים כפולים, פוֹבִינִי, החלפת סדר והחלפת משתנים

עיקרון מנחה

אינטגרל כפול הוא כלי לסכימה רציפה על פני שטח. בפועל רוב העבודה אינה באינטגרציה עצמה אלא בתיאור נכון של התחום: מלבן, תחום פשוט ביחס לציר אחד, החלפת סדר אינטגרציה, או מעבר למשתנים חדשים. בחירה נכונה של תיאור התחום הופכת חישוב מסובך לחישוב קצר.

1.1 אינטגרל כפול ופוביני

הגדרה פורמלית

אינטגרל כפול על מלבן. אם $R = [a, b] \times [c, d]$ ו- f רציפה על R , אז

$$\iint_R f(x, y) dA$$

מתאר סכום רציף של ערכי f על המלבן. כאשר $f \geq 0$, זהו נפח הגוף שמתחת לגרף $z = f(x, y)$ ומעל R .

הערה קטנה ומועילה

אינטגרליות רימן בכמה משתנים. פונקציה חסומה f על מלבן R נקראת אינטגרלית רימן אם סכומי רימן שלה מתכנסים לאותו גבול כאשר גודל החלוקה שואף לאפס, ללא תלות בבחירת נקודות הדגימה בתתי המלבנים. הגבול הזה מסומן

$$\iint_R f(x, y) dA.$$

במסגרת הקורס משתמשים בעיקר בתנאים מספיקים:

- רציפות על מלבן קומפקטי מספיקה לאינטגרליות.
- פונקציה חסומה שרציפה פרט למספר סופי של עקומות חלקות למקוטעין היא אינטגרלית במובן המקובל בקורס.
- כאשר התחום אינו מלבן, מתארים אותו באמצעות תחומים פשוטים או פירוק למספר תחומים פשוטים, תחת אותן הנחות רציפות ואינטגרליות.

הערה קטנה ומועילה

משפטים שימושיים על אינטגרליות. ההגדרה המדויקת דרך סכומי רימן אינה מרכז התרגול, אבל חשוב לדעת אילו עובדות מותר להפעיל:

1. אם f אינטגרלית רימן על מלבן סגור וחסום, אז f חסומה שם. לכן פונקציה שאינה חסומה אינה אינטגרלית רימן רגילה, ואם בכל זאת מחשבים אינטגרל שלה צריך לנסח זאת כאינטגרל לא אמיתי.
2. אם f רציפה על מלבן סגור וחסום, אז f אינטגרלית רימן עליו.
3. אם f ו- g אינטגרליות על אותו מלבן, אז גם $f + g$, $f - g$, ו- cf אינטגרליות לכל קבוע c .
4. אם f אינטגרלית על מלבן R , ואם האינטגרלים החוזרים קיימים במובן המתאים של הקורס, אז אפשר לחשב את האינטגרל הכפול בעזרת אינטגרלים חוזרים. במקרה הרציף אין צורך להסתבך עם ניסוח כללי יותר: פוביני חל ישירות.
5. אם D אינו מלבן, בדרך כלל מפרקים אותו למספר סופי של תחומים פשוטים, או מתארים אותו כתחום פשוט ביחס לאחד הצירים. גבולות החישוב הם חלק מהבעיה, ולא קישוט טכני.

טענה 1.1.1

משפט פוביני על מלבן. אם f רציפה על $R = [a, b] \times [c, d]$, אז

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

הוכחה.

זהו משפט פוביני מן ההרצאה תחת ההנחות הרגילות בקורס. רציפות על מלבן קומפקטי מספיקה. בניסוחים כלליים יותר מניחים אינטגרביליות רימן עם תנאים מתאימים, ואז האינטגרל הכפול מחושב באמצעות אינטגרלים חוזרים בכל אחד משני הסדרים.

נוצר על ידי חן גדי

משמעות האינטגרל הכפול בפיזיקה ובהנדסה

הערה קטנה ומועילה

אינטגרל כפול אינו רק דרך לחשב נפח. הוא דרך לסכום גודל צפוף על פני תחום דו ממדי.

• **שטח:** אם $f \equiv 1$, אז

$$\iint_D 1 \, dA = \text{Area}(D).$$

• **נפח תחת גרף:** אם $f \geq 0$, אז $\iint_D f \, dA$ הוא נפח הגוף שמתחת לגרף $z = f(x, y)$ ומעל התחום D .

• **מסה של לוח דק:** אם $\rho(x, y)$ היא צפיפות מסה ליחידת שטח, אז

$$M = \iint_D \rho(x, y) \, dA.$$

• **מרכז מסה:** עבור לוח דק בעל מסה M ,

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x, y) \, dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x, y) \, dA.$$

• **מומנט התמד סביב ציר z :** זהו מדד להתנגדות הלוח לסיבוב סביב הציר. עבור לוח במישור xy , המרחק בריבוע מן הציר הוא $x^2 + y^2$, ולכן

$$I_z = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dA.$$

• **מטען, חום וכמות כוללת:** אם $\sigma(x, y)$ היא צפיפות מטען או צפיפות חום ליחידת שטח, אז $\iint_D \sigma \, dA$ נותן את הכמות הכוללת.

• **ערך ממוצע:** אם רוצים ממוצע של f על תחום בעל שטח חיובי,

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{\text{Area}(D)} \iint_D f \, dA.$$

לפני חישוב כדאי לשאול מה האינטגרל מודד. לעיתים הסימטריה הפיזיקלית, למשל צפיפות רדיאלית או תחום סימטרי, מגלה מראש אילו איברים יתאפסו.

תרגילים: פוביני במלבן והפרדת משתנים

תרגיל 1.1.2.

תהא $f(x, y)$ פונקציה רציפה כך ש $f(x, y) = A(x)B(y)$, הוכיחו בבקשה כי:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b A(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d B(y) dy \right)$$

פתרון.

נשים לב כי בעזרת פוביני:

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d A(x)B(y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b A(x) \left(\int_c^d B(y) dy \right) dx = \left(\int_c^d B(y) dy \right) \cdot \left(\int_a^b A(x) dx \right) \end{aligned}$$

כאשר $\int_a^b A(x) dx = \int_c^d B(y) dy$, ובלינאריות האינטגרל.

□

ניצחון

תרגיל 1.1.3.

חשבו

$$\iint_R (x + 2y) dA, \quad R = [0, 2] \times [1, 3].$$

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו תרגיל בסיסי של פוביני על מלבן. שני הסדרים אפשריים, ונבחר אינטגרציה פנימית לפי y .

$$\iint_R (x + 2y) dA = \int_0^2 \int_1^3 (x + 2y) dy dx.$$

האינטגרל הפנימי:

$$\int_1^3 (x + 2y) dy = xy + y^2 \Big|_1^3 = 3x + 9 - (x + 1) = 2x + 8.$$

לכן

$$\int_0^2 (2x + 8) dx = [x^2 + 8x]_0^2 = 4 + 16 = 20.$$

$$\boxed{\iint_R (x + 2y) dA = 20.}$$

□

ניצחון

הגדרה פורמלית

תחומים פשוטים. תחום D פשוט ביחס לציר x אם

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

במקרה זה

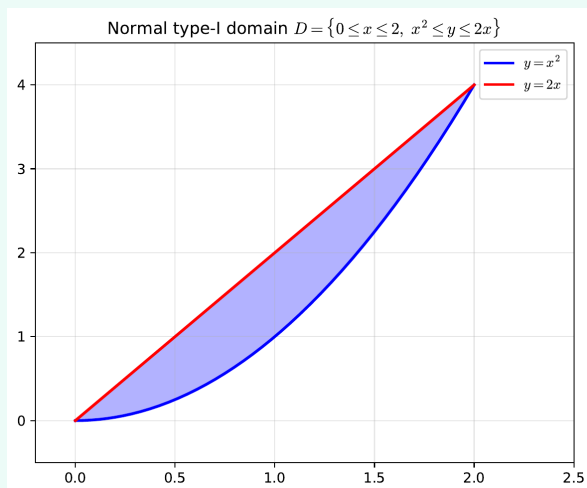
$$\iint_D f dA = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx.$$

תחום פשוט ביחס לציר y אם

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

ואז

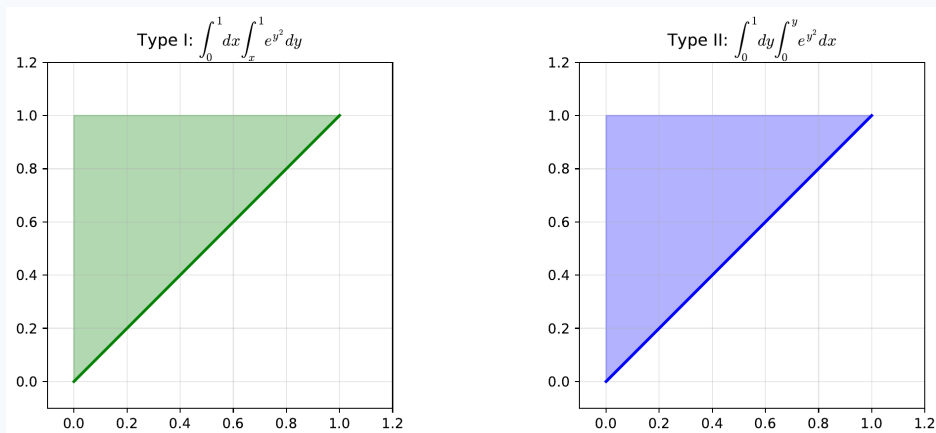
$$\iint_D f dA = \int_c^d \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx dy.$$



תחום פשוט: עבור כל ערך חיצוני, המשתנה הפנימי נע בין שתי פונקציות.

הערה קטנה ומועילה

החלפת סדר אינטגרציה. כאשר התחום ניתן לתיאור בשתי הדרכים, מותר לבחור את הסדר הנוח. לעיתים האינטגרל הפנימי אינו ניתן לחישוב אלמנטרי בסדר אחד, אבל לאחר החלפת סדר הוא הופך לאינטגרל פשוט.



אותו תחום, שתי דרכי סריקה. הבחירה בסריקה הנכונה חוסכת עבודה.

תרגילים: תחומים פשוטים והחלפת סדר אינטגרציה

תרגיל 1.1.4.

חשבו את השטח של התחום D החסום בין $y = x^2$ לבין $y = 2 - x^2$.

פתרון.

עיקרון מנחה

השטח הוא $\iint_D 1 \, dA$. תחילה מוצאים נקודות חיתוך, ואז מתארים את התחום כתחום פשוט ביחס לציר x .

נקודות החיתוך מתקבלות מן

$$x^2 = 2 - x^2 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

לכן

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}.$$

השטח:

$$\text{Area}(D) = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} 1 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) \, dx.$$

$$\int_{-1}^1 (2 - 2x^2) \, dx = \left[2x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$

$$\boxed{\text{Area}(D) = \frac{8}{3}}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.1.5.

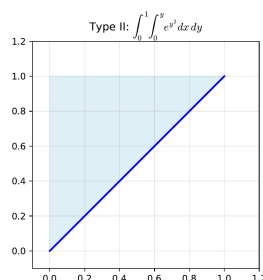
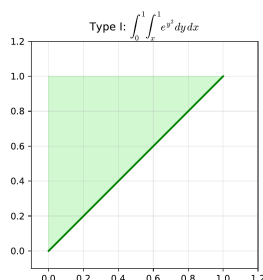
חשבו

$$I = \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} \, dy \, dx.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

האינטגרל הפנימי לפי y אינו אלמנטרי. לכן נחליף סדר אינטגרציה. התחום הוא המשולש $0 \leq x \leq y \leq 1$, ובסדר החדש האינטגרציה הפנימית לפי x פשוטה.



המשולש $0 \leq x \leq y \leq 1$. פרוסות אופקיות הופכות את e^{y^2} לקבוע ביחס למשתנה הפנימי.

התחום הנתון:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}.$$

כלומר בסדר המקורי משתמשים בפרוסות אנכיות. בתיאור לפי פרוסות אופקיות:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}.$$

בתיאור לפי y :

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq y.$$

לכן

$$I = \int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy.$$

נציב $du = 2y dy, u = y^2$:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{e-1}{2}.$$

$$I = \frac{e-1}{2}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.1.6.

יהי D התחום החסום בין

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

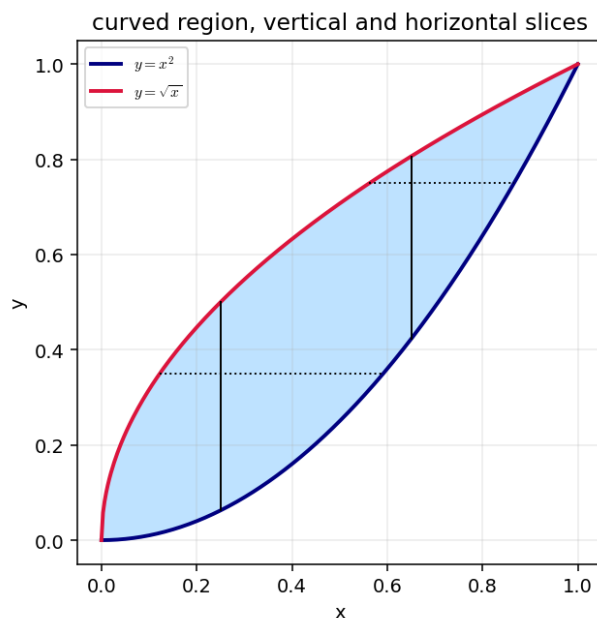
חשבו

$$\iint_D (x + y) dA$$

פתרון.

עיקרון מנחה

התחום פשוט ביחס לשני הצירים, אבל הגבולות נראים שונים מאוד. התיאור האנכי קורא את התחום מלמטה למעלה, והתיאור האופקי מתקבל על ידי פתרון $x = y^2$ ו- $x = \sqrt{y}$. הציור מונע בלבול בין העקומות.

התחום בין $y = x^2$ לבין $y = \sqrt{x}$, עם פרוסות אנכיות ואופקיות.תיאור אנכי. עבור $0 \leq x \leq 1$,

$$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}.$$

לכן

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

תיאור אופקי. כאשר $0 \leq y \leq 1$, מן $y = x^2$ נקבל $x = \sqrt{y}$, ומן $y = \sqrt{x}$ נקבל $x = y^2$. לכן

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

נחשב בסדר האופקי:

$$\iint_D (x+y) dA = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x+y) dx dy.$$

האינטגרל הפנימי הוא

$$\left(\frac{x^2}{2} + yx \right)_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2}(y - y^4) + y^{3/2} - y^3.$$

לכן

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^4 + y^{3/2} - y^3 \right) dy = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{10}.$$

$$\boxed{\iint_D (x+y) dA = \frac{3}{10}.$$

שני הסדרים חוקיים; כאן הסדר האופקי נוח מפני שהגבולות מתקבלים ישירות מן $x = y^2$ ו- $x = \sqrt{y}$, והחישוב נשאר פולינומי וחזקתי.

□

ניצחון

תרגיל 1.1.7.

יהי D המשולש

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2 - y\}.$$

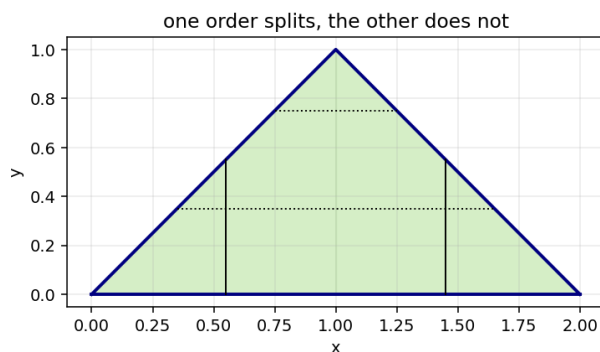
חשבו

$$\iint_D (x + 2y) dA,$$

פתרון.

עיקרון מנחה

בפרוסות אופקיות התחום מתואר בשורה אחת. בפרוסות אנכיות צריך לפצל ב- $x = 1$, כי הגבול העליון מתחלף מן הישר $y = x$ לישר $y = 2 - x$. זו בדיוק דוגמה שבה הציוור חשוב יותר מן האלגברה.



אותו משולש. פרוסות אנכיות דורשות פיצול, פרוסות אופקיות לא.

תיאור ללא פיצול.

$$0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq 2 - y.$$

לכן

$$I = \int_0^1 \int_y^{2-y} (x + 2y) dx dy.$$

האינטגרל הפנימי:

$$\left(\frac{x^2}{2} + 2yx \right)_{x=y}^{x=2-y}.$$

בגבול העליון:

$$\frac{(2-y)^2}{2} + 2y(2-y) = 2 + 2y - \frac{3}{2}y^2.$$

בגבול התחתון:

$$\frac{y^2}{2} + 2y^2 = \frac{5}{2}y^2.$$

לכן

$$I = \int_0^1 (2 + 2y - 4y^2) dy = 2 + 1 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}.$$

התיאור המפוצל. אם מתעקשים על פרוסות אנכיות, מקבלים

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x,$$

וגם

$$1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2 - x.$$

לכן אותו אינטגרל הוא

$$\int_0^1 \int_0^x (x + 2y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} (x + 2y) dy dx.$$

הסדר האופקי עדיף מפני שהוא נמנע מפיצול.

$$I = \frac{5}{3}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.1.8.

חשבו

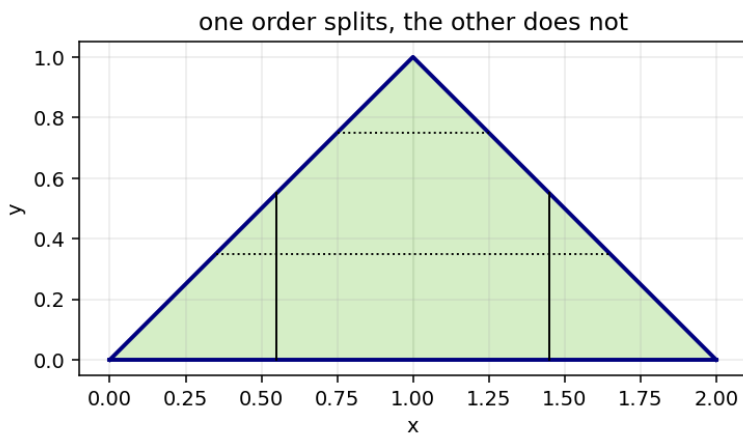
$$I = \int_0^1 \int_0^x (x+y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} (x+y) dy dx.$$

החליפו את סדר האינטגרציה.

פתרון.

עיקרון מנחה

בסדר $dy dx$ התחום מתואר על ידי שתי נוסחאות שונות, מפני שגובה המשולש משתנה בנקודה $x = 1$. אם חותכים אופקית, כל פרוסה עוברת מנקודה אחת על הצלע השמאלית לנקודה אחת על הצלע הימנית, ולכן אין צורך בפיצול.



אותו תחום משולש: פרוסות אנכיות דורשות פיצול, ופרוסות אופקיות נותנות תיאור יחיד.

התיאור המקורי הוא

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x,$$

וגם

$$1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2 - x.$$

מן השרטוט, או מן הישרים $y = x$ ו- $y = 2 - x$, נקבל את התיאור האופקי:

$$0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq 2 - y.$$

לכן

$$I = \int_0^1 \int_y^{2-y} (x + y) dx dy.$$

נחשב את האינטגרל הפנימי:

$$\int_y^{2-y} (x + y) dx = \left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_{x=y}^{x=2-y}.$$

בקצה העליון:

$$\frac{(2-y)^2}{2} + y(2-y) = 2 - \frac{y^2}{2}.$$

בקצה התחתון:

$$\frac{y^2}{2} + y^2 = \frac{3y^2}{2}.$$

לכן

$$\int_y^{2-y} (x + y) dx = 2 - 2y^2.$$

לבסוף

$$I = \int_0^1 (2 - 2y^2) dy = \left[2y - \frac{2y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

$$\boxed{I = \frac{4}{3}}.$$

□

ניצחון

שילוב של טורי פונקציות - לא בטוח שנעשה

תרגיל 1.1.9.

הראו שמותר לבצע אינטגרציה איבר איבר עבור הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n y$$

על המלבן $R = [0, 1] \times [0, 1]$, וחשבו את האינטגרל הכפול של סכום הטור.

פתרון.

עיקרון מנחה

זהו שימוש ישיר בהתכנסות במידה שווה. אם טור פונקציות מתכנס במידה שווה על תחום קומפקטי וכל איבר אינטגרלי, מותר להעביר אינטגרל דרך הסכום. כאן מבחן M של ויירשטראס נותן את ההצדקה הפורמלית.

לכל $(x, y) \in R$ מתקיים

$$\left| \left(\frac{x}{2}\right)^n y \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

הטור המספרי $\sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n$ מתכנס, ולכן לפי מבחן M הטור הנתון מתכנס במידה שווה על R . כל איבר הוא פולינום, ולכן רציף ואינטגרלי. לכן מותר לבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\iint_R \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n y dA = \sum_{n=0}^{\infty} \iint_R \left(\frac{x}{2}\right)^n y dA.$$

נחשב איבר כללי:

$$\iint_R \left(\frac{x}{2}\right)^n y dA = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n}{2^n} y dy dx = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2}.$$

לכן

$$\iint_R \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n y dA = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}.$$

נסמן $m = n + 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1/2)^m}{m} = -\ln \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

אפשר גם לראות שסכום הטור הוא

$$\frac{y}{1 - x/2},$$

ואז האינטגרל הישיר נותן אותה תוצאה.

$$\boxed{\iint_R \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n y dA = \ln 2.}$$



ניצחון

נוצר על ידי חן גדי

1.2 החלפת משתנים, יעקוביאן ופולריות

טענה 1.2.1.

החלפת משתנים במישור. תהי

$$T : U \rightarrow D, \quad T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

העתקה C^1 , חד חד ערכית בתחום הרלוונטי עד בעיות שפה לא מזיקות. נגדיר

$$J_T(u, v) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

אם J_T אינו מתאפס פרט אולי לקבוצות שפה או קבוצות שטח אפס שאינן פוגעות בהחלפה, אז

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_U f(T(u, v)) |J_T(u, v)| du dv,$$

כלומר

$$dA = |J_T(u, v)| du dv.$$

הוכחה.

היעקוביאן מודד את גורם שינוי השטח המקומי. תא קטן במישור (u, v) עובר למקבילית קטנה במישור (x, y) , והשטח מוכפל בערך המוחלט של הדטרמיננטה. הערך המוחלט חשוב מפני ששטח הוא חיובי גם אם ההעתקה הופכת אוריינטציה.

מקור, תמונה והיעקוביאן

הערה קטנה ומועילה

בהחלפת משתנים עדיף לחשוב במונחים של **מקור ותמונה**, ולא במונחים עמומים של תחום ישן ותחום חדש. המקור הוא התחום U במשתנים שבהם נוח לחשב, והתמונה היא התחום $D = T(U)$ במישור המקורי:

$$T : U \rightarrow D, \quad T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

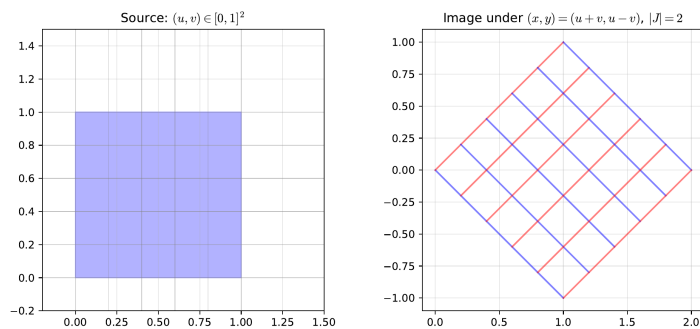
כאשר מחשבים אינטגרל על D , מעבירים את החישוב חזרה אל המקור U . הנקודה (u, v) במקור נשלחת לנקודה $(x, y) = T(u, v)$ בתמונה, ותא שטח קטן $du dv$ במקור נשלח בקירוב למקבילית קטנה בתמונה. לכן

$$\text{שטח במקור} \approx |J_T(u, v)| \text{שטח בתמונה}.$$

כלומר

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_U f(T(u, v)) |J_T(u, v)| du dv.$$

בציורים כדאי לסמן תמיד: משמאל את המקור U , מימין את התמונה D , וחץ T ביניהם.



היעקוביאן מודד כיצד שטחים קטנים משתנים תחת ההעתקה.

הגדרה פורמלית

קואורדינטות פולריות. נגדיר

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0.$$

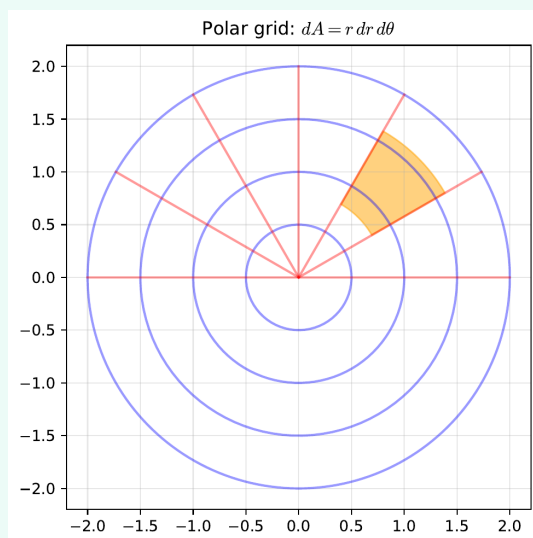
היעקוביאן הישיר הוא

$$J_T(r, \theta) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r.$$

לכן

$$dA = r dr d\theta.$$

היעקוביאן מתאפס רק ב- $r = 0$, נקודה אחת במישור. זו קבוצה בעלת שטח אפס, ובשימושים הרגילים בפולריות היא אינה פוגעת בהחלפה. פולריות טבעיות כאשר התחום הוא דיסק, טבעת, גזרה, או כאשר האינטגרנד תלוי ב- $x^2 + y^2$.



אלגוריתם לבחירת שיטת חישוב באינטגרל כפול

הערה קטנה ומועילה

1. מציירים את התחום לפני שמציבים גבולות.
2. אם התחום מלבן, משתמשים ישירות בפוביני.
3. אם אינו מלבן, בודקים אם הוא פשוט ביחס לאחד הצירים: $a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$ או $c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)$.
4. אם שני הסדרים אפשריים, בוחרים את הסדר שבו הגבולות או האינטגרל הפנימי פשוטים יותר.
5. אם סדר אחד דורש פיצול, בודקים אם הסדר השני מתאר את התחום בלי פיצול.
6. אם שפת התחום בנויה מעקומות רמה של ביטויים כמו $x + y, x - y, xy, y/x$ או $x^2 + y^2$, שוקלים החלפת משתנים.
7. אם יש סימטריה של התחום ושל האינטגרנד, משתמשים בה לפני החישוב.
8. אם התחום אינו חסום, או שיש שפה סינגולרית שבה האינטגרנד אינו חסום, מצהירים במפורש שזהו אינטגרל לא אמיתי ומחשבים כגבול.

מתי מחשבים יעקוביאן רגיל ומתי יעקוביאן הפוך?

הערה קטנה ומועילה

בנוסחת החלפת המשתנים, אם כותבים

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

צריך להציב

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|.$$

אם התרגיל נותן דווקא

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

נסמן

$$S = T^{-1}, \quad S(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

ונגדיר

$$J_{T^{-1}}(x, y) = \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

יש שתי דרכים. אפשר לפתור במפורש עבור x, y במונחי u, v , ואז לחשב את J_T הישיר. לחלופין מחשבים את $J_{T^{-1}}$ ומשתמשים בזהות

$$|J_T| = \frac{1}{|J_{T^{-1}}|},$$

בתנאי ש- $J_{T^{-1}} \neq 0$. נימנע מסימון לא מוגדר ליעקוביאן הפוך, כדי לא לבלבל בין מספר שהוא דטרמיננטה לבין מטריצה הפוכה.

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|}.$$

הערה קטנה ומועילה

דוגמאות קצרות.

1. בפולריות כותבים ישירות

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

ולכן

$$J_T(r, \theta) = r, \quad dA = r dr d\theta.$$

2. אם $u = xy, v = y/x$ ברביע הראשון, נוח לחשב את $S = T^{-1}$:

$$J_{T^{-1}}(x, y) = \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 2v.$$

לכן

$$|J_T| = \frac{1}{2v}, \quad dA = \frac{1}{2v} du dv.$$

3. אם $u = x + y, v = x - y$, אז

$$J_{T^{-1}}(x, y) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2,$$

ולכן

$$|J_T| = \frac{1}{2}, \quad dA = \frac{1}{2} du dv.$$

הערה קטנה ומועילה

תנאי יעקוביאן שאינו מתאפס. ההעתקה צריכה להיות C^1 , חד חד ערכית על התחום הרלוונטי עד בעיות שפה, ובעלת יעקוביאן שאינו מתאפס פרט אולי לקבוצות זניחות. באינטגרלים כפולים מותר לעיתים שהיעקוביאן יתאפס על עקומות או על חלקי שפה, שהם קבוצות שטח אפס. באינטגרלים

משולשים מותר לעיתים שהיעקוביאן יתאפס על משטחים או חלקי שפה, שהם קבוצות נפח אפס. למשל, בפולריות היעקוביאן הוא r , והוא מתאפס ב- $r = 0$, נקודה אחת במישור. בכדוריות היעקוביאן הוא $\rho^2 \sin \varphi$, והוא מתאפס בראשית ועל הציר, קבוצות נפח אפס. בכל פתרון צריך לציין שהקבוצה החריגה אינה פוגעת בהחלפה.

הערה קטנה ומועילה

מלבון תחום. לפעמים בוחרים משתנים חדשים לא מפני שהאינטגרנד פשוט יותר, אלא מפני שהתחום נעשה מלבן. מקבילית נטויה יכולה להגיע ממלבן בהעתקה לינארית, יהלום יכול להפוך למלבן על ידי

$$u = x + y, \quad v = x - y,$$

ותחום בין עקומות רמה כמו $xy = \text{const}$ יכול להתיישר על ידי $u = xy$. בכל החלפה צריך לבצע שלושה צעדים: לתאר את התחום החדש, לחשב יעקוביאן, ולהציב גם את האינטגרנד.

הערה קטנה ומועילה

דוגמאות מהירות ליעקוביאן.

פירוש	יעקוביאן לשימוש	החלפה
מתיחה לפי הצירים	$ J_T = ab $	$T(u, v) = (au, bv)$
גזירה שאינה משנה שטח	$ J_T = 1$	$T(u, v) = (u + kv, v)$
קואורדינטות פולריות	$ J_T = r$	$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
יהלום נעשה מלבן	$ J_T = \frac{1}{ J_{T^{-1}} } = \frac{1}{2}$	$T^{-1}(x, y) = (x + y, x - y)$

תרגילים: החלפת משתנים, מקור ותמונה

תרגיל 1.2.2.

חשבו את

$$\iint_D (x - y) dA$$

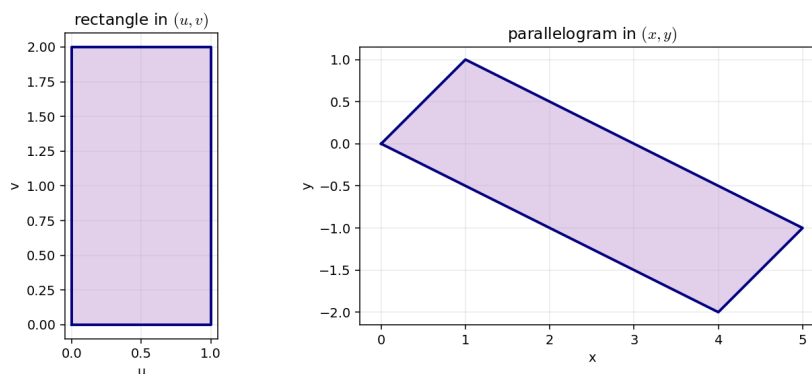
כאשר D היא המקבילית הנפרשת על ידי הווקטורים $(1, 1)$, $(2, -1)$ מן הראשית:

$$D = \{u(1, 1) + v(2, -1) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

המקבילית נולדת ממלבן יחידה במשתנים u, v . לכן ההחלפה הלינארית היא השפה הטבעית של התחום, והיעקוביאן קבוע.



המלבן $0 \leq u, v \leq 1$ עובר למקבילית במישור xy .

נגדיר

$$T(u, v) = (u + 2v, u - v), \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

כלומר

$$x = u + 2v, \quad y = u - v, \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

כאן מחשבים את J_T ישירות:

$$J_T(u, v) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3.$$

לכן

$$dA = |J_T| du dv = 3 du dv.$$

היעקוביאן אינו מתאפס כלל, ולכן אין קבוצה חריגה. כמו כן

$$x - y = (u + 2v) - (u - v) = 3v.$$

נקבל

$$\iint_D (x - y) dA = \int_0^1 \int_0^1 3v \cdot 3 du dv = 9 \int_0^1 v dv = \frac{9}{2}.$$

$$\boxed{\iint_D (x - y) dA = \frac{9}{2}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.3.

יהי

$$D = \{(x, y) : |x + y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}.$$

חשבו

$$\iint_D (x^2 - y^2) dA$$

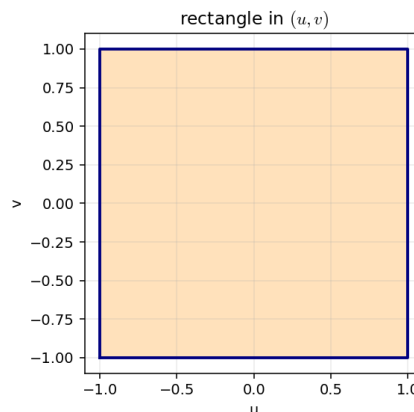
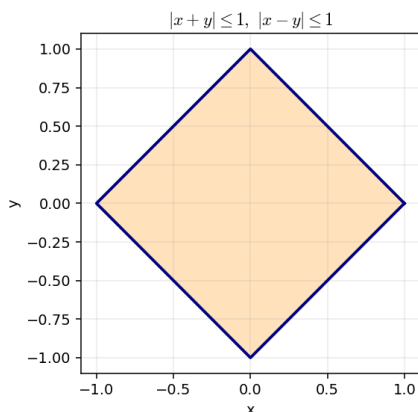
באמצעות ההחלפה

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

גבולות התחום הם בדיוק עקומות הרמה של u ושל v . לכן המשתנים החדשים הופכים את היהלום למלבן. בנוסף, לאחר ההחלפה האינטגרנד נעשה uv , והסימטריה של המלבן תגרום לאינטגרל להתאפס.



היהלום במישור xy הופך למלבן במישור uv .

מן ההגדרות:

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

כלומר $T(u, v) = ((u+v)/2, (u-v)/2)$. כאן מחשבים את J_T ישירות:

$$J_T(u, v) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

לכן

$$dA = |J_T| du dv = \frac{1}{2} du dv.$$

היעקוביאן אינו מתאפס כלל. התחום החדש הוא

$$-1 \leq u \leq 1, \quad -1 \leq v \leq 1.$$

כמו כן

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = uv.$$

לכן

$$\iint_D (x^2 - y^2) dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 uv \cdot \frac{1}{2} dv du.$$

האינטגרנד אי זוגי ב- v על תחום סימטרי, ולכן האינטגרל מתאפס:

$$\boxed{\iint_D (x^2 - y^2) dA = 0.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.4.

יהי

$$D = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq x \leq 2, y > 0\}.$$

חשבו

$$\iint_D x dA$$

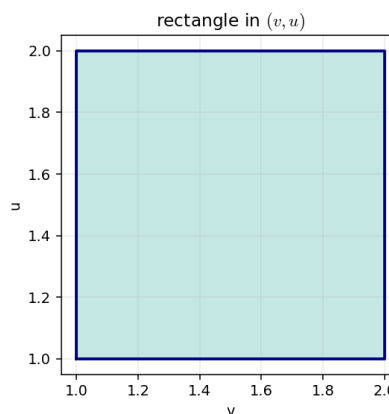
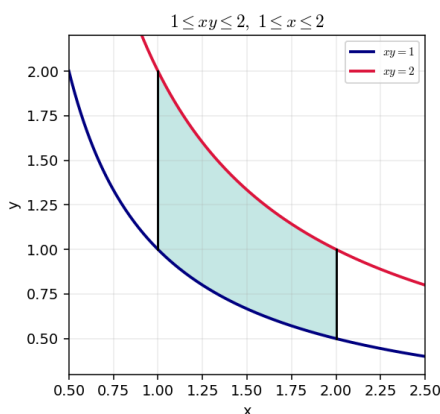
בעזרת

$$u = xy, \quad v = x.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

הגבולות $xy = 1$ ו- $xy = 2$ הם היפרבולות. לכן $u = xy$ הוא משתנה טבעי. הגבולות $x = 1$ ו- $x = 2$ נעשים פשוט $v = 1$ ו- $v = 2$. כך תחום עקום הופך למלבן.



תחום בין היפרבולות במישור xy , ומלבן במשתנים u, v . $u = xy, v = x$

נסמן את ההעתקה הישירה

$$T(u, v) = \left(v, \frac{u}{v} \right).$$

זו ההחלפה ההפוכה ל- $S(x, y) = (xy, x)$ בתחום הנתון, ובמלבן $1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2$ מתקיים $v > 0$, ולכן אין בעיית חד חד ערכיות. בפועל נחשב את J_T ישירות:

$$x = v, \quad y = \frac{u}{v}.$$

$$J_T(u, v) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}.$$

לכן

$$dA = |J_T| du dv = \frac{1}{v} du dv.$$

בתחום החדש $v \geq 1$, ולכן $J_T \neq 0$. אין קבוצה חריגה בתוך התחום. התחום החדש הוא המלבן

$$1 \leq u \leq 2, \quad 1 \leq v \leq 2.$$

מאחר ש- $x = v$,

$$\iint_D x dA = \int_1^2 \int_1^2 v \cdot \frac{1}{v} du dv = \int_1^2 \int_1^2 1 du dv = 1.$$

$$\boxed{\iint_D x dA = 1.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.5.

יהי D התחום המוגדר על ידי

$$1 \leq 2x + y \leq 3, \quad 0 \leq x - y \leq 2.$$

חשבו

$$\iint_D (x + y) dA$$

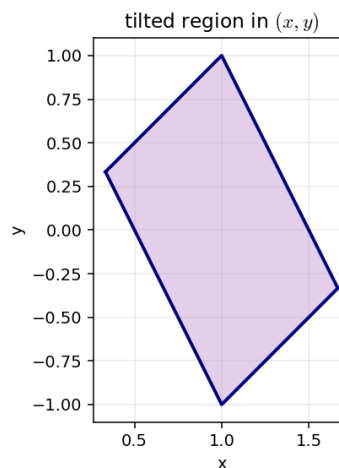
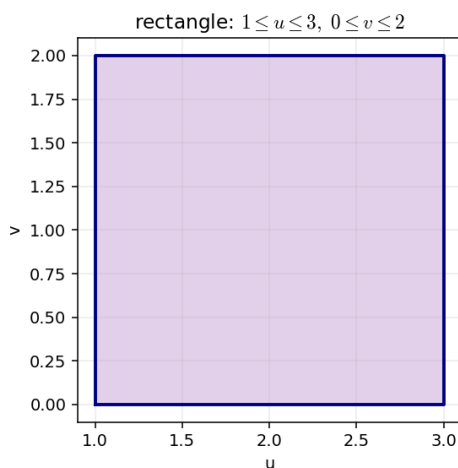
באמצעות המשתנים

$$u = 2x + y, \quad v = x - y.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

התחום נראה כארבע רצועות נטויות במישור xy , ולכן תיאור ישיר שלו דורש תשומת לב לגבולות. המשתנים u, v נבחרים בדיוק לפי המשפחות של הישרים המגבילים את התחום, ולכן הם ממלכנים את התחום.



משמאל: התחום הנטוי במישור xy . מימין: אותו תחום הופך למלבן במישור uv .

נפתור את מערכת המשוואות

$$u = 2x + y, \quad v = x - y.$$

נקבל

$$x = \frac{u + v}{3}, \quad y = \frac{u - 2v}{3}.$$

כלומר

$$T(u, v) = \left(\frac{u + v}{3}, \frac{u - 2v}{3} \right).$$

כאן מחשבים את J_T ישירות:

$$J_T(u, v) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3},$$

ולכן

$$dA = |J_T| du dv = \frac{1}{3} du dv.$$

היעקוביאן אינו מתאפס כלל. התחום החדש הוא המלבן

$$1 \leq u \leq 3, \quad 0 \leq v \leq 2.$$

כמו כן

$$x + y = \frac{2u - v}{3}.$$

מכאן

$$\iint_D (x + y) dA = \int_0^2 \int_1^3 \frac{2u - v}{3} \cdot \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{9} \int_0^2 \int_1^3 (2u - v) du dv.$$

נחשב:

$$\int_1^3 (2u - v) du = [u^2 - vu]_1^3 = 8 - 2v.$$

לכן

$$\frac{1}{9} \int_0^2 (8 - 2v) dv = \frac{1}{9} [8v - v^2]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$\boxed{\iint_D (x + y) dA = \frac{4}{3}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.6.

יהי D התחום ברביע הראשון החסום על ידי

$$xy = 1, \quad xy = 4, \quad y = x, \quad y = 3x.$$

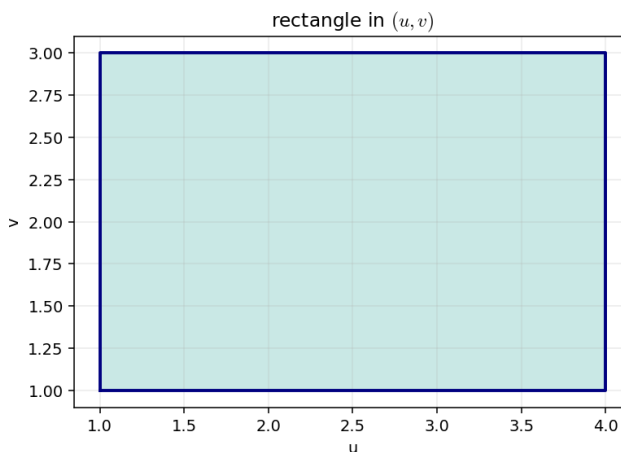
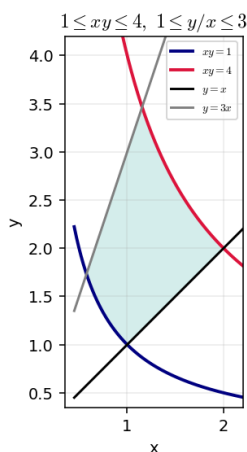
חשבו

$$\iint_D xy dA.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

שתי משפחות העקומות שמגדירות את התחום הן $xy = \text{const}$ ו- $y/x = \text{const}$. לכן המשתנים הטבעיים הם $u = xy$ ו- $v = y/x$. ברביע הראשון יש להם הופכי נקי, והתחום הופך למלבן.



העקומות $xy = \text{const}$ והקריניים $y = vx$ יוצרות תחום שמתמלבן במשתנים $u = xy$, $v = y/x$.

נגדיר

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}.$$

מאחר שאנו ברביע הראשון, $x > 0$, $y > 0$, ולכן

$$y = vx, \quad u = vx^2.$$

מכאן

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}.$$

נסמן

$$S(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right) = T^{-1}(x, y).$$

כאן נוח לחשב את $J_{T^{-1}}$, כלומר את היעקוביאן של ההעתקה ההפוכה:

$$J_{T^{-1}}(x, y) = \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2v.$$

לכן

$$|J_T| = \frac{1}{|J_{T^{-1}}|} = \frac{1}{2v}, \quad dA = \frac{1}{2v} du dv.$$

בתחום החדש $1 \leq v \leq 3$, ולכן $J_{T^{-1}} = 2v \neq 0$. אין קבוצה חריגה בתוך התחום. הגבולות נעשים

$$1 \leq u \leq 4, \quad 1 \leq v \leq 3.$$

מאחר ש- $xy = u$,

$$\iint_D xy \, dA = \int_1^3 \int_1^4 u \cdot \frac{1}{2v} \, du \, dv = \frac{1}{2} \left(\int_1^4 u \, du \right) \left(\int_1^3 \frac{dv}{v} \right).$$

כעת

$$\int_1^4 u \, du = \frac{15}{2}, \quad \int_1^3 \frac{dv}{v} = \ln 3.$$

לכן

$$\boxed{\iint_D xy \, dA = \frac{15}{4} \ln 3.}$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.7.

יהי D החיתוך של הדיסק

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

עם הרצועה

$$0 \leq x + y \leq 2.$$

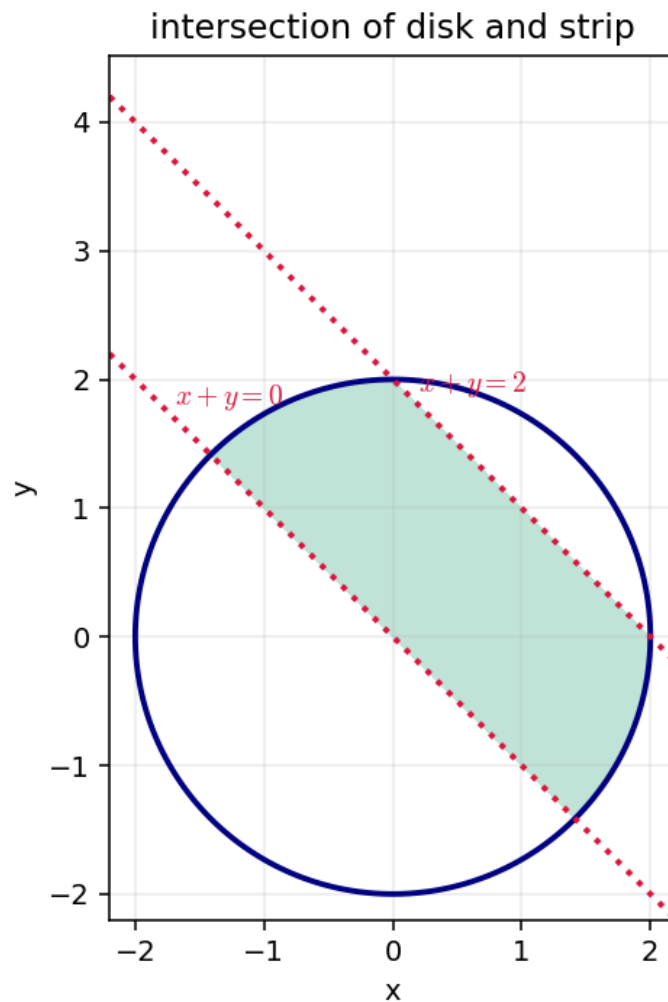
חשבו

$$\iint_D (x + y) \, dA.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

התחום הוא חיתוך של שני סוגי אילוצים: דיסק ורצועה נטויה. קואורדינטות פולריות מתארות יפה את הדיסק, אבל הרצועה $0 \leq x + y \leq 2$ אינה רדיאלית. סיבוב צירים לפי $u = (x + y)/\sqrt{2}$ הופך את הרצועה לרצועה אנכית, ומשאיר את הדיסק דיסק.



התחום הוא החלק של הדיסק הנמצא בין שני הישרים $x + y = 0$ ו- $x + y = 2$.

נגדיר

$$u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

זהו סיבוב של הצירים, ולכן אפשר לצפות ששטחים יישמרו. נסמן

$$S(x, y) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right) = T^{-1}(x, y).$$

נחשב את $J_{T^{-1}}$:

$$J_{T^{-1}}(x, y) = \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -1.$$

לכן

$$|J_T| = \frac{1}{|J_{T^{-1}}|} = 1, \quad dA = du \, dv.$$

אין נקודות שבהן היעקוביאן מתאפס. הדיסק נשאר דיסק:

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \leq 4.$$

הרצועה הופכת ל

$$0 \leq \sqrt{2}u \leq 2,$$

כלומר

$$0 \leq u \leq \sqrt{2}.$$

לכן

$$D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \sqrt{2}, -\sqrt{4-u^2} \leq v \leq \sqrt{4-u^2}\}.$$

האינטגרנד הוא

$$x + y = \sqrt{2}u.$$

ולכן

$$\iint_D (x + y) \, dA = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-u^2}}^{\sqrt{4-u^2}} \sqrt{2}u \, dv \, du.$$

נחשב את האינטגרל הפנימי:

$$\int_{-\sqrt{4-u^2}}^{\sqrt{4-u^2}} \sqrt{2}u \, dv = 2\sqrt{2}u\sqrt{4-u^2}.$$

לכן

$$\iint_D (x + y) \, dA = 2\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} u\sqrt{4-u^2} \, du.$$

נציב $ds = -2u \, du$, $s = 4 - u^2$

$$\int_0^{\sqrt{2}} u\sqrt{4-u^2} \, du = \frac{1}{2} \int_2^4 s^{1/2} \, ds = \frac{1}{3} (8 - 2\sqrt{2}).$$

לכן

$$\boxed{\iint_D (x + y) \, dA = \frac{16\sqrt{2} - 8}{3}}.$$

הבחירה בסיבוב צירים טובה כאן מפני שהיא שומרת את הדיסק פשוט ומיישרת את הרצועה.

□

ניצחון

תרגילים: פולריות, סימטריה ושימושים פיזיקליים

תרגיל 1.2.8.

חשבו

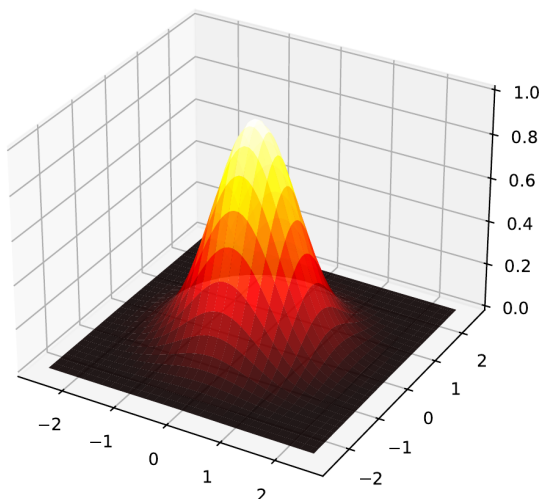
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} e^{-(x^2+y^2)} dA.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

התחום הוא דיסק והאינטגרנד תלוי רק ב- r^2 . לכן פולריות הן הבחירה הטבעית.

$e^{-(x^2+y^2)}$: bell shape, integral $= \pi$ on $\mathbb{R}^2$



בפולריות נגדיר

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

אז

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad J_T(r, \theta) = r, \quad dA = r dr d\theta.$$

היעקוביאן מתאפס רק ב- $r = 0$, נקודה בעלת שטח אפס. כאן זו נקודת פנים יחידה של הדיסק, והיא אינה פוגעת בחישוב האינטגרל. הדיסק $x^2 + y^2 \leq 4$ מתואר על ידי

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

לכן

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} e^{-(x^2+y^2)} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 e^{-r^2} r dr d\theta.$$

האינטגרל הפנימי:

$$\int_0^2 e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (1 - e^{-4}).$$

לכן

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2 \leq 4} e^{-(x^2+y^2)} dA = \pi(1 - e^{-4}).}$$

□

ניצחון

1.2.9. תרגיל

לוח דק תופס את חצי הדיסק העליון

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\},$$

וצפיפות המסה שלו היא $\rho(x, y) = ky$, $k > 0$. מצאו את המסה ואת מרכז המסה.

פתרון.

עיקרון מנחה

הסימטריה סביב ציר y נותנת מיד $\bar{x} = 0$. המסה והמומנט סביב ציר x מתאימים במיוחד לפולריות, כי $y = r \sin \theta$.

בפולריות נגדיר

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

אז

$$J_T(r, \theta) = r, \quad dA = r dr d\theta.$$

היעקוביאן מתאפס רק ב- $r = 0$, נקודה בעלת שטח אפס. התחום הוא

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad y = r \sin \theta.$$

מסה.

$$M = \iint_D ky dA = k \int_0^\pi \int_0^R (r \sin \theta) r dr d\theta.$$

$$M = k \left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) = k \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{2kR^3}{3}.$$

רכיב $\bar{x}$. בגלל סימטריה, $\bar{x} = 0$. גם חישוב ישיר נותן $\iint_D x \rho \, dA = 0$, כי האינטגרנד אי זוגי ב- x .
רכיב $\bar{y}$.

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x, y) \, dA = \frac{1}{M} \iint_D k y^2 \, dA.$$

בפולריות:

$$\iint_D k y^2 \, dA = k \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin^2 \theta \cdot r \, dr \, d\theta = k \left(\frac{R^4}{4} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{k\pi R^4}{8}.$$

לכן

$$\bar{y} = \frac{k\pi R^4/8}{2kR^3/3} = \frac{3\pi R}{16}.$$

$$M = \frac{2kR^3}{3}, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{3\pi R}{16} \right).$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.10.

חשבו

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dA,$$

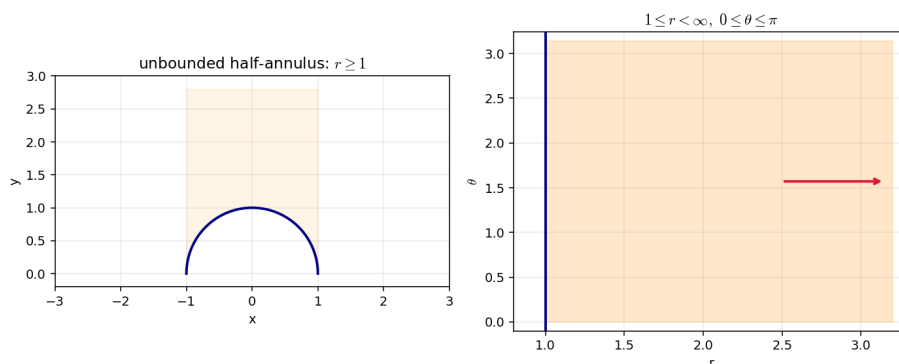
כאשר

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0\}.$$

פתרון.

עיקרון מנחה

התחום אינו חסום, ולכן האינטגרל הוא לא אמיתי. מעבר לקואורדינטות פולריות מפריד בין הזווית לבין המרחק מן הראשית, וההתכנסות נקבעת על ידי דעיכת e^{-r^2} .



התחום הוא חצי המישור העליון מחוץ למעגל היחידה. בפולריות מתקבל $1 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi$.

בקואורדינטות פולריות נגדיר

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

כאן

$$J_T(r, \theta) = r, \quad dA = r dr d\theta.$$

היעקוביאן מתאפס רק ב- $r = 0$, אך התחום שלנו מקיים $r \geq 1$, ולכן אין קבוצה חריגה בתחום האינטגרציה. הגבולות הם

$$1 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

לכן

$$I = \int_0^\pi \int_1^\infty e^{-r^2} r dr d\theta.$$

זהו אינטגרל לא אמיתי בגלל הגבול $r = \infty$, ולכן נחשב אותו כגבול:

$$I = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^\pi \int_1^A e^{-r^2} r dr d\theta.$$

האינטגרל הפנימי הוא

$$\int_1^A e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} \left[e^{-r^2} \right]_1^A = \frac{1}{2} (e^{-1} - e^{-A^2}).$$

ולכן

$$I = \lim_{A \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{1}{2} (e^{-1} - e^{-A^2}) = \frac{\pi}{2e}.$$

הגבול קיים מפני ש- $e^{-A^2} \rightarrow 0$, ולכן האינטגרל מתכנס.

$$I = \frac{\pi}{2e}.$$

□

ניצחון

תרגיל 1.2.11

לוח דק תופס את התחום

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

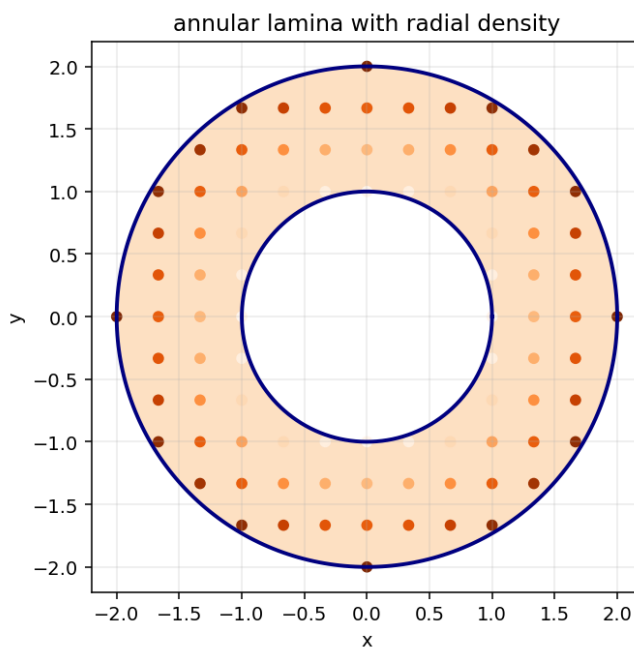
צפיפות המסה שלו היא

$$\rho(x, y) = \rho_0 (1 + \alpha(x^2 + y^2)), \quad \rho_0 > 0, \quad \alpha \geq 0.$$

מצאו את המסה הכוללת ואת מומנט ההתמד סביב ציר z .פתרון.

עיקרון מנחה

התחום והצפיפות סימטריים סיבובית. לכן קואורדינטות פולריות הן הבחירה הטבעית, והסימטריה גם אומרת שמרכז המסה נמצא בראשית. כאן נחשב מסה ומומנט התמד, כאשר r^2 הוא המרחק בריבוע מציר הסיבוב.



לוח טבעתי עם צפיפות רדיאלית: הסימטריה סביב הראשית מציעה קואורדינטות פולריות.

נעבור לפולריות. נגדיר

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

אז

$$J_T(r, \theta) = r, \quad dA = r dr d\theta.$$

בתחום $1 \leq r \leq 2$, ולכן $J_T \neq 0$. נקודת החריגה $r = 0$ אינה שייכת לתחום. התחום הוא

$$1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

המסה היא

$$M = \iint_D \rho dA = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho_0(1 + \alpha r^2)r dr d\theta.$$

לכן

$$M = 2\pi\rho_0 \left[\frac{r^2}{2} + \alpha \frac{r^4}{4} \right]_1^2 = 2\pi\rho_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{15\alpha}{4} \right).$$

מומנט ההתמד סביב ציר z הוא

$$I_z = \iint_D r^2 \rho dA.$$

כלומר

$$I_z = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \rho_0(1 + \alpha r^2)r dr d\theta = 2\pi\rho_0 \int_1^2 (r^3 + \alpha r^5) dr.$$

ולכן

$$I_z = 2\pi\rho_0 \left[\frac{r^4}{4} + \alpha \frac{r^6}{6} \right]_1^2 = 2\pi\rho_0 \left(\frac{15}{4} + \frac{21\alpha}{2} \right).$$

$$M = 2\pi\rho_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{15\alpha}{4} \right), \quad I_z = 2\pi\rho_0 \left(\frac{15}{4} + \frac{21\alpha}{2} \right).$$

□

ניצחון

